МАТЕМАТИКА

УДК 517.977.8

© *Ю. В. Авербух*

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ МНОГИХ ЛИЦ[1]

Для дифференциальной игры многих лиц найдены условия того, что заданное многозначное отображение в каждой точке есть множество выигрышей в ситуациях равновесия по Нэшу. Данное условие выписано в инфинитезимальной форме. Также найдены достаточные условия, при которых набор непрерывных функций обеспечивает равновесие по Нэшу. Данное условие обобщает метод, основанный на системе уравнений типа Гамильтона–Якоби.

Ключевые слова: равновесие по Нэшу, дифференциальные игры, обобщенные производные.

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию множества выигрышей в ситуациях равновесия по Нэшу в неантагонистической дифференциальной игре многих лиц. Эта задача рассматривается в свете методов, разработанных для исследования антагонистических дифференциальных игр в работах Н. Н. Красовского, А. И. Субботина [1, 2] и их учеников.

Как показано в работах [3, 4], в этом случае равновесие по Нэшу существует в классе совместных смешанных стратегий с координационным центром. Движение при этом формируется следующим образом: игроки, совместно выбрав некоторое базовое движение, его реализуют; если один из игроков отклоняется от этого движения, то координационный центр об этом информирует остальных игроков. Доказательство существования равновесной по Нэшу совместной смешанной стратегии ведется при помощи «стратегий наказания». С использованием этой техники также дается характеризация множества выигрышей в ситуациях равновесия по Нэшу [3, 5].

В настоящей работе найдены условия, использующие аппарат негладкого анализа, при которых заданное многозначное отображение является множеством значений игры по Нэшу (то есть множеством выигрышей в ситуациях равновесия по Нэшу). Также получены условия, при которых значения непрерывной функции позиции со значения в $\mathbb{R}^m$ (m — количество игроков) являются некоторыми значениями игры по Нэшу. Показано, что эти условия обобщают метод систем уравнений типа Гамильтона–Якоби, в частности, описанный в [6].

§ 1. Определения и обозначения

Мы рассматриваем управляемую систему

$$\dot{x} = f(t, x, u_1, \ldots, u_m), \quad t \in [t_0, \vartheta_0], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u_i \in P_i, \quad i = \overline{1, m}. \tag{1.1}$$

Мы считаем, что u_i — управление i-го игрока. Цель i-го игрока — максимизировать терминальный выигрыш $\sigma_i(x(\vartheta_0))$. Мы предполагаем, что множества P_i — конечномерные компакты, f непрерывна, локально липшицева по x и удовлетворяет по x условию подлинейного роста.

Мы будем использовать совместные смешанные стратегии и определение равновесия по Нэшу для этого случая, данное в [3]. Предполагается наличие некоторого координирующего центра, который контролирует совместное исполнение решения игроками и в случае отклонения

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых (проект МК-7320.2010.1), РФФИ (грант №09-01-00436-а) и программы Президиума РАН “Математическая теория управления”.

одного из них от совместного решения информирует об этом остальных. Функции, формируемые этим центром, имеют вид

$$\alpha[t] = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, \theta), \\ i, & t \in [\theta, \vartheta_0], \end{cases}$$

где i — некоторое целое число от 1 до m.

Обозначим множество таких функций через $\mathcal{A}$.

Кроме этого, введем следующие обозначения:

$$P \triangleq \prod_{i=\overline{1,m}} P_i, \qquad Q_j \triangleq \prod_{i=\overline{1,m}, i\neq j} P_i.$$

Также мы будем использовать обобщенные управления — мерозначные функции. Пусть E — некоторый конечномерный компакт, $\mathcal{B}(E)$ — семейство множеств, измеримых по Борелю, τ — некоторый момент из $[t_0, \vartheta_0]$. Будем называть функцию $\mu : [\tau, \vartheta_0] \times \mathcal{B}(E) \to [0, 1]$ обобщенным управлением на $[\tau, \vartheta_0]$, если при каждом t $\mu(t, \cdot)$ есть мера на $\mathcal{B}(E)$, а $\mu(\cdot, \cdot)$ слабо измерима, то есть измерима функция

$$t \mapsto \int_E \varphi(c)\mu(t, dc)$$

для всех $\varphi \in C(E)$. Через $\mathcal{R}(\tau; E)$ обозначим множество всех обобщенных управлений на $[\tau, \vartheta_0]$.

Совместной стратегией игроков называется набор функций $\mathcal{W} = (u^{[0]}(t, x, \varepsilon), u^{[1]}(t, x, \varepsilon), \ldots, \alpha[\cdot], u^{[m]}(t, x, \varepsilon), \beta(\varepsilon))$. Здесь (t, x) — позиция, ε — параметр точности, $\beta(\varepsilon)$ — функция, ограничивающая мелкость разбиения сверху, α — зависящая от времени функция координирующего центра. Также $u^{[0]}$ принимает значения во множестве P, а функции $u^{[j]}$ во множествах Q_j.

Пусть выбраны некоторая начальная позиция $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, стратегия $\mathcal{W}$, параметр точности ε и разбиение $\Delta = \{\tau_k\}_{k=0}^r$ отрезка $[t_*, \vartheta_0]$ мелкости, не превышающей $\beta(\varepsilon)$.

Управление игроков формируется следующим образом. Пусть реализовалась некоторая функция координирующего центра $\alpha[\cdot]$. Обозначим через θ момент переключения на некоторое число $j \in \overline{1, m}$. Пусть l — наименьший номер такой, что $\tau^l \geqslant \theta$. Для $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ при $k < l$ управление i-го игрока равно i-й координате функции $u^{[0]}(\tau_k, x_k, \varepsilon)$, при $k \geqslant l$ управление i-го игрока равно соответствующей координате вектор-функции $u^{[j]}(\tau_k, x_k, \varepsilon)$. Здесь x_k — положение системы, реализовавшееся в момент τ_k.

Далее обозначим функцию $\alpha[\cdot]$, тождественно равную нулю через $\alpha^0[\cdot]$.

Поясним характер формирования управления. Пусть j-й игрок отклонился от совместного движения в момент времени θ. Это означает, что до момента времени θ все игроки совместно реализовывали стратегию, после этого момента все игроки кроме j-го совместно реализуют свою стратегию, что позволит им воздействовать на «уклониста». Таким образом, стратегия $\mathcal{W}$ порождает:

(1) совместное движение; это случай, когда никто из игроков не отклоняется от использования $\mathcal{W}$, обозначим его через $x^{[0]}[\cdot, t_*, x_*, \mathcal{W}, \varepsilon, \Delta]$;

(2) движение, порожденное индивидуальным управлением i-го игрока $u_i[\cdot]$ и совместной стратегией $\mathcal{W}$; в этом случае стратегию $\mathcal{W}$ используют все игроки, кроме i-го; обозначим его через $x^{[i]}[\cdot, t_*, x_*, \mathcal{W}, \varepsilon, \Delta, u_i[\cdot]]$.

Определим конструктивные движения. Именно, будем говорить, что $x[\cdot]$ есть конструктивное движение, выходящее из позиции (t_*, x_*), если существует последовательность движений $x^{[0]}[\cdot, t_k, \mathcal{W}, \varepsilon_k, \Delta_k]$ такая, что $(t_k, x_k) \to (t_*, x_*)$, $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, сходящаяся в смысле траекторий к $x[\cdot]$. Множество всех совместных конструктивных движений, порожденных стратегией $\mathcal{W}$, обозначим через $X^{[0]}(t_*, x_*, \mathcal{W})$. Аналогично определяются и множество всех конструктивных движений в случае, когда i-й игрок уклоняется. Обозначим его через $X^{[i]}(t_*, x_*, \mathcal{W})$.

Мы будем использовать следующее определение равновесия по Нэшу [3]. Будем говорить, что стратегия $\mathcal{W}$ равновесна по Нэшу, если выполнено неравенство

$$\max\{\sigma_i(x[\vartheta_0]) : x[\cdot] \in X^{[i]}(t_*, x_*, \mathcal{W})\} \leqslant \min\{\sigma_i(z[\vartheta_0]) : z[\cdot] \in X^{[0]}(t_*, x_*, \mathcal{W})\}.$$

Ясно, что значение вектора выигрышей $(\sigma_1(z[\vartheta_0]), \ldots, \sigma_m(z[\vartheta_0]))$ не зависит от выбора конкретного движения $z[\cdot] \in X^{[0]}(t_*, x_*, \mathcal{W})\}$.

§ 2. Формулировка основного результата

Рассмотрим следующее многозначное отображение

$$\mathcal{N} : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^m).$$

Оно сопоставляет каждой позиции $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ множество всех выигрышей в ситуациях равновесия по Нэшу. Отображение $\mathcal{N}$ есть значение дифференциальной игры по Нэшу.

Из [3, Теорема 6.1] следует, что отображение $\mathcal{N}$ непустозначно.

Далее мы будем использовать вместо обобщенных движений решения дифференциального включения. А именно, рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \mathcal{F}(t, x) \triangleq \mathrm{co}\big\{f(t, x, u_1, \ldots, u_m) : u_i \in P_i, \quad i = \overline{1, m}\big\}. \tag{2.1}$$

Обозначим множество его решений с начальным условием $x(t_*) = x_*$ через $\mathrm{Sol}(t_*, x_*)$.

Следующее утверждение позволяет описать отображение $\mathcal{N}$.

Предложение 1. *Пусть многозначное отображение $\mathcal{T} : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ удовлетворяет следующим свойствам:*

(N1) $\mathcal{T}(t, x) \subset [\omega_1(t, x), \infty) \times \ldots \times [\omega_m(t, x), \infty)$ *для всех* $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$;

(N2) $\mathcal{T}(\vartheta_0, x) = \{(\sigma_1(x), \ldots, \sigma_m(x))\}$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$;

(N3) *для всех* $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, $\varsigma \in \mathcal{T}(t_*, x_*)$ *существует движение* $z(\cdot) \in \mathrm{Sol}(t_*, x_*)$ *такое, что*

$$\varsigma \in \mathcal{T}(t, z(t)), \quad t \in [t_*, \vartheta_0].$$

Тогда $\mathcal{T}(t, x) \subset \mathcal{N}(t, x)$ *для всех* $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$.

Предложение немедленно следует из [3, Теорема 6.3].

Пусть I — произвольное множество индексов. Если многозначные отображения $\mathcal{T}^\alpha$: $[t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$, $\alpha \in I$ удовлетворяют условиям (N1)–(N3), то многозначное отображение $\mathcal{T}^* : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$, определенное по правилу $\widetilde{\mathcal{T}} = \mathrm{Cl}\,\mathcal{T}$, где

$$\mathcal{T}(t, x) \triangleq \Big[\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{T}^\alpha(t, x)\Big],$$

также полунепрерывно сверху по включению, имеет компактные образы и удовлетворяет условиям (N1)–(N3). Здесь Cl — замыкание графика, то есть

$$[\mathrm{Cl}\,\mathcal{T}](t, x) \triangleq \{\varsigma : \exists\{(t^k, x^k)\}_{k=1}^{\infty} \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \ \ \exists\{\varsigma^k\} \subset \mathbb{R}^m : \\ \varsigma^k \in \mathcal{T}(t^k, x^k), \quad (t^k, x^k) \to (t, x), \quad \varsigma^k \to \varsigma, \quad k \to \infty\}.$$

По определению имеем, что $\mathrm{Cl}\,[\mathrm{Cl}\,\mathcal{T}] = \mathrm{Cl}\,\mathcal{T}$. Более того, график отображения $\mathrm{Cl}\,\mathcal{T}$ локально компактен. Будем говорить, что отображение $\mathcal{T}$ полунепрерывно сверху, если $\mathrm{Cl}\,\mathcal{T} = \mathcal{T}$.

Обозначим через $\mathcal{T}^\circ$ объединение всех полунепрерывных сверху многозначных отображений из $[t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ в множество всех подмножеств $\mathbb{R}^m$, удовлетворяющих условиям (N1)–(N3). Положим

$$\mathcal{T}^* \triangleq \mathrm{Cl}\,[\mathcal{T}^\circ].$$

Следствие 1. *Для всех* $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ *справедливо равенство* $\mathcal{T}^*(t, x) = \mathcal{N}(t, x)$.

Условие (N1) связано с теорией антагонистических дифференциальных игр. Известны [7] условия, в том числе в инфинитезимальной форме, характеризующие функцию цены в антагонистической игре. Условие (N2) — краевое условие. Далее мы дадим ряд эквивалентных формулировок условия (N3), использующих понятие слабой инвариантности и ряд методов негладкого анализа.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{T} : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ полунепрерывно сверху по включению. Тогда условие* (N3) *эквивалентно тому, что для всех $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, $\varsigma \in \mathcal{T}(t_*, x_*)$ существуют $\theta > t_*$ и $y(\cdot) \in \mathrm{Sol}(t_*, x_*)$ такие, что*

$$\varsigma \in \mathcal{T}(t, y(t)), \quad t \in [t_*, \theta].$$

Эта теорема будет доказана в § 3.

Для того, чтобы сформулировать инфинитезимальную форму условия (N3), мы рассмотрим следующую производную, аналогичную производной по Адамару. Обозначим через dist следующее расстояние в $\mathbb{R}^m$:

$$\mathrm{dist}[\varsigma, \mathcal{T}(t^1, x^1)] \triangleq \inf \left\{ |\zeta_1 - \varsigma_1| + \ldots + |\zeta_m - \varsigma_m| : (\zeta_1, \ldots, \zeta_m) \in \mathcal{T}(t^1, x^1) \right\}.$$

$$\mathrm{D}_H \mathcal{T}(t, x; \varsigma, w) \triangleq \liminf_{\delta \downarrow 0, w' \to w} \frac{\mathrm{dist}[\varsigma, \mathcal{T}(t + \delta, x + \delta w')]}{\delta}.$$

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{T} : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ замкнуто. Тогда условие* (N3) *эквивалентно тому, что для всех $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$*

$$\sup_{\varsigma \in \mathcal{T}(t,x)} \inf_{w \in \mathcal{F}(t,x)} \mathrm{D}_H \mathcal{T}(t_*, x_*; \varsigma, w) = 0. \tag{2.2}$$

Теорема 2 также доказывается в § 3.

Отметим одно достаточное условие того, что функция $c = (c_1, \ldots, c_m) : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ доставляет равновесие по Нэшу. Ниже используется следующее обозначение для $i \in \overline{1, m}$:

$$H_i(t, x, s) \triangleq \max_{\mu \in \mathcal{R}(t; P_i)} \min_{\nu \in \mathcal{R}(t; Q_i)} \int_{P_i} \int_{Q_i} \langle s, f(t, x, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_m) \rangle \mu(t, du_i) \nu(t, d(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_m)).$$

Если $c = (c_1, \ldots, c_m) : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, то модуль-производной функции c по Адамару в позиции $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ вдоль направления $w \in \mathbb{R}^n$ будем называть величину

$$\mathrm{d}_{abs} c(t, x; w) \triangleq \liminf_{\delta \downarrow 0, w' \to w} \frac{|c_1(t + \delta, x + \delta w') - c_1(t, x)| + \ldots + |c_m(t + \delta, x + \delta w') - c_m(t, x)|}{\delta}.$$

Следствие 2. *Пусть функция $c = (c_1, \ldots, c_m) : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывна, $c_i(\vartheta_0, \cdot) = \sigma_i(\cdot)$, $i = \overline{1, m}$, функции c_i являются верхним решением дифференциальных уравнений*

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + H_i(t, x, \nabla c_i) = 0, \tag{2.3}$$

и для всех $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$

$$\inf_{w \in \mathcal{F}(t,x)} \mathrm{d}_{abs} c(t, x; w) = 0.$$

Тогда для всех $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ набор чисел $(c_1(t, x), \ldots, c_m(t, x))$ является некоторым значением игры по Нэшу.

Следствие 2 вытекает из определений модуль-производных и того, что ω_i является наименьшим верхним решением уравнения (2.3) [7].

Далее мы покажем, что сформулированный результат является обобщением метода систем уравнений типа Гамильтона–Якоби. При некоторых условиях этот метод доставляет решение в классе непрерывных стратегий [6].

Предложение 2. *Пусть функция* $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *дифференцируема,* $\varphi_i(\vartheta_0, \cdot) = \sigma_i(\cdot)$, $i = \overline{1,m}$. *Пусть также функция* φ *удовлетворяет следующему условию: для каждой позиции* $(t,x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ *существуют* $u_i^* \in P_i$, $i = \overline{1,m}$ *такие, что*

$$\max_{u_i \in P_i} \langle \nabla \varphi_i(t,x), f(t,x,u_1^*, \ldots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \ldots, u_m^*) \rangle = \\ = \langle \nabla \varphi_i(t,x), f(t,x,u_1^*, \ldots, u_{i-1}^*, u_i^*, u_{i+1}^*, \ldots, u_m^*) \rangle. \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \varphi_i(t,x)}{\partial t} + \big\langle \nabla \varphi_i(t,x), f(t,x,u_1^*, \ldots, u_m^*) \big\rangle = 0, \quad i = \overline{1,m}. \quad (2.5)$$

Тогда функция φ *удовлетворяет условиям следствия* 2.

Данное предложение доказывается в § 3.

Если управления u_i^*, $i = \overline{1,m}$ можно выбрать однозначно для каждой позиции $(t,x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ и каждого набора направлений $s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{R}^n$, то определены гамильтонианы $\mathcal{H}_i$ по формуле

$$\mathcal{H}_i(t,x,s_1,\ldots,s_m) \triangleq \langle s_i, f(t,x,u_1^*,\ldots,u_m^*) \rangle, \quad i = 1,2.$$

Тогда условие (2.5) эквивалентно тому, что функция $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ является решением системы дифференциальных уравнений типа Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \mathcal{H}_i(t,x,\nabla\varphi_1,\ldots,\nabla\varphi_m) = 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

§ 3. Свойства значения дифференциальной игры по Нэшу

Доказательство следствия 1. Из [3, Теорема 6.2] следует, что само отображение $\mathcal{N}$ удовлетворяет условиям (N1)–(N3). Таким образом, $\mathcal{N}(t_*, x) \subset \mathcal{T}^*(t,x)$ для всех $(t,x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$.

Теперь докажем, что $\mathrm{Cl}\,[\mathcal{N}] = \mathcal{N}$. В самом деле, пусть $\varsigma \in \mathrm{Cl}\,[\mathcal{N}](t_*, x_*)$. Тогда существует последовательность $\{(t^k, x^k, \varsigma^k)\}_{k=1}^\infty$ такая, что $\varsigma^k = (\varsigma_1^k, \ldots, \varsigma_m^k) \in \mathcal{N}(t^k, x^k)$, $(t^k, x^k, \varsigma^k) \to (t_*, x_*, \varsigma)$, $k \to \infty$. Для каждого k существует $z^k(\cdot) \in \mathrm{Sol}(t^k, x^k)$ со свойством:

$$\varsigma_i^k = \sigma_i(z^k(\vartheta_0)) \geqslant \omega_i(t, z^k(t)), \quad i = \overline{1,m}, \quad t \in [t_*, \vartheta_0]. \quad (3.1)$$

Из последовательности $\{z^k(\cdot)\}_{k=1}^\infty$ можно выделить сходящуюся. Без ограничения общности можно считать, что сама последовательность $\{z^k(\cdot)\}$ сходится к некоторому движению $z(\cdot)$. Заметим, что $z(\cdot) \in \mathrm{Sol}(t_*, x_*)$. Переходя к пределу в (3.1), получаем, что

$$\varsigma_i = \sigma_i(z(\vartheta_0)) \leqslant \omega_i(z(\vartheta_0)), \quad i = \overline{1,m}, \quad t \in [t_*, \vartheta_0].$$

Рассмотрим многозначное отображение $\mathcal{T}^\diamond$, определяемое по правилу:

$$\mathcal{T}^\diamond(t,x) = \begin{cases} \{\varsigma\}, & t \in [t_*, \vartheta_0], \quad x = z(t), \\ \varnothing, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В силу предложения 1 имеем, что $\mathcal{T}^\diamond(t,x) \subset \mathcal{N}(t,x)$. Следовательно, $\varsigma \in \mathcal{N}(t_*, x_*)$.

Также из предложения 1 следует, что $\mathcal{T}^\circ(t,x) \subset \mathcal{N}(t,x)$ для всех $(t,x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$. Имеем, что для всех $(t,x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{N}(t,x) \subset \mathcal{T}^*(t,x) = \mathrm{Cl}\,[\mathcal{T}^\circ](t,x) \subset \mathrm{Cl}\,[\mathcal{N}](t,x) = \mathcal{N}(t,x).$$

Отсюда получаем заключение следствия 1. □

Доказательство теоремы 1. Если условие (N3) выполнено, то в теореме 1 можно выбрать $\theta = \vartheta_0$.

Пусть теперь для всех (t_*,x_*), $\varsigma\in\mathcal{T}(t_*,x_*)$ существуют такие θ и $y(\cdot)\in\mathrm{Sol}(t_*,x_*)$, что

$$\varsigma\in\mathcal{T}(t,y(t)),\quad t\in[t_*,\theta]. \tag{3.2}$$

Пусть Θ — множество тех моментов θ, для которых (3.2) выполнено при некотором $y(\cdot)\in\mathrm{Sol}(t_*,x_*)$. Обозначим через $\tau\triangleq\sup\Theta$. Покажем, что $\tau\in\Theta$. В самом деле, пусть $\theta_k\in\Theta$, $\theta_k\to\tau$, $k\to\infty$. Можно считать, что $\theta_k<\theta_{k+1}\leqslant\tau$. Для каждого k (3.2) верно при $\theta=\theta_k$, $y(\cdot)=y_k(\cdot)\in\mathrm{Sol}(t_*,x_*)$. В силу компактности пучка решений можно считать, что $y_k(\cdot)\to y^*(\cdot)$, $k\to\infty$, здесь $y^*(\cdot)$ — некоторый элемент $\mathrm{Sol}(t_*,x_*)$. В силу замкнутости отображения $\mathcal{T}$ имеем, что $\varsigma\in\mathcal{T}(\theta_k,y^*(\theta_k))$. Та же замкнутость дает, что $\varsigma\in\mathcal{T}(\tau,y^*(\tau))$. Обозначим $x^*=y^*(\tau)$.

Покажем, что $\tau=\vartheta_0$. Если $\tau<\vartheta_0$, то по условию существуют движение $\hat{y}(\cdot)\in\mathrm{Sol}(\tau,x^*)$ и момент $\theta'>\tau$ такие, что $\varsigma\in\mathcal{T}(t,\hat{y}(t))$, $t\in[\tau,\theta']$. Введем в рассмотрение движение

$$\tilde{y}(t)\triangleq\begin{cases} y^*(t), & t\in[t_*,\tau],\\ \hat{y}(t), & t\in[\tau,\theta'].\end{cases}$$

Из определения θ' следует, что условие (3.2) верно при $\theta=\theta'$, $y(\cdot)=\tilde{y}(\cdot)$. Таким образом, $\theta'\in\Theta$, что противоречит выбору τ. Следовательно, $\tau=\vartheta_0$ и условие (N3) выполнено. □

Доказательство теоремы 2. Заметим, что условие, сформулированное в теореме 1, может быть переформулировано следующим образом: график $\mathcal{T}$ — множество

$$\mathrm{gr}\,\mathcal{T}\triangleq\{(t,x,\varsigma):(t,x)\in[t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^n,\quad\varsigma\in\mathcal{T}\}$$

— слабо инвариантен относительно дифференциального включения

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{\varsigma}_1\\ \vdots\\ \dot{\varsigma}_m\end{pmatrix}\in\widehat{\mathcal{F}}(t,x)\triangleq\mathrm{co}\left\{\begin{pmatrix}f(t,x,u,v)\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}:u\in P,v\in Q\right\}.$$

Условие слабой инвариантности графика $\mathcal{T}$ относительно дифференциального включения $\widehat{\mathcal{F}}$ формулируется (см. [7, 8]) следующим образом:

$$D_t(\mathrm{gr}\,\mathcal{T})(t,x,\varsigma_1,\ldots,\varsigma_m)\cap\widehat{\mathcal{F}}(t,x)\neq\varnothing \tag{3.3}$$

для всех $(t,x)\in[t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^n$, $\varsigma\in\mathcal{T}(t,x)$. Здесь D_t обозначает производную многозначного отображения по времени: если $\mathcal{G}\subset[t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^{n+m}$, $\mathcal{G}[t]$ — сечение множества по времени

$$\mathcal{G}[t]\triangleq\{w\in\mathbb{R}^m:(t,w)\in\mathcal{G}\},$$

а символ d обозначает евклидово расстояние от точки до множества, то

$$(D_t\mathcal{G})(t,y)\triangleq\left\{h\in\mathbb{R}^{n+m}:\liminf_{\delta\to0}\frac{\mathrm{d}(y+\delta h;\mathcal{G}[t+\delta])}{\delta}=0\right\}.$$

Покажем, что условия (2.2) и (3.3) эквивалентны.

Заметим, что условие (2.2) эквивалентно тому, что для каждой пары $\varsigma\in\mathcal{T}(t,x)$

$$\inf_{w\in\mathcal{F}(t,x)}\ \liminf_{\delta\downarrow0,\gamma\in\mathbb{R}^n,\|\gamma\|\downarrow0}\frac{\mathrm{dist}\big[\varsigma,\mathcal{T}(t+\delta,x+\delta(w+\gamma))\big]}{\delta}=0.$$

Нижняя грань по w в формуле

$$\inf_{w\in\mathcal{F}(t,x)}\ \liminf_{\delta\downarrow0,\gamma\in\mathbb{R}^n,\|\gamma\|\downarrow0}\frac{\mathrm{dist}\big[\varsigma,\mathcal{T}(t+\delta,x+\delta(w+\gamma))\big]}{\delta}$$

достигается для каждого элемента $\varsigma \in \mathcal{T}(t,x)$. В самом деле, пусть $\{w^r\}_{r=1}^{\infty}$ — минимизирующая последовательность. В силу компактности $\mathcal{F}(t,x)$ можно считать, что $w^r \to w^*$, $r \to \infty$, $w^* \in \mathcal{F}(t,x)$. Покажем, что

$$\tilde{b} \triangleq \inf_{w\in\mathcal{F}(t,x)} \liminf_{\delta\downarrow 0,\gamma\in\mathbb{R}^n,\|\gamma\|\downarrow 0} \frac{\operatorname{dist}\big[\varsigma,\mathcal{T}(t+\delta,x+\delta(w+\gamma))\big]}{\delta}$$
$$= \liminf_{\delta\downarrow 0,\gamma\in\mathbb{R}^n,\|\gamma\|\downarrow 0} \frac{\operatorname{dist}\big[\varsigma,\mathcal{T}(t+\delta,x+\delta(w^*+\gamma))\big]}{\delta}. \tag{3.4}$$

В самом деле, для каждого $r\in\mathbb{N}$ существуют последовательности $\{\delta^{r,k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\gamma^{r,k}\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что $\delta^{r,k}, \|\gamma^{r,k}\| \to 0$, $k\to\infty$ и

$$b^r \triangleq \liminf_{\delta\downarrow 0,\gamma\in\mathbb{R}^n,\|\gamma\|\downarrow 0} \frac{\operatorname{dist}\big[\varsigma,\mathcal{T}(t+\delta,t+\delta(w^r+\gamma))\big]}{\delta} = \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{dist}\big[\varsigma,\mathcal{T}(t+\delta^{r,k},t+\delta^{r,k}(w^r+\gamma^{r,k}))\big]}{\delta^{r,k}}.$$

Пусть $\hat{k}(r)$ — такой номер, что

$$\delta^{r,\hat{k}(r)}, \|\gamma^{r,\hat{k}(r)}\|, \left|\frac{\operatorname{dist}\big[\varsigma,\mathcal{T}(t+\delta^{r,\hat{k}(r)},t+\delta^{r,\hat{k}(r)}(w^r+\gamma^{r,\hat{k}(r)}))\big]}{\delta^{r,\hat{k}(r)}} - b^r\right| < 2^{-r}.$$

Положим $\hat{\delta}^r \triangleq \delta^{r,\hat{k}(r)}$, $\hat{\gamma}^r \triangleq \gamma^{r,\hat{k}(r)} + w^r - w^*$. Заметим, что $\hat{\delta}^r, \|\hat{\gamma}^r\| \to 0$, $r\to\infty$.

Имеем, что

$$\inf_{w\in\mathcal{F}(t,x)} \liminf_{\delta\downarrow 0,\gamma\in\mathbb{R}^n,\|\gamma\|\downarrow 0} \frac{\operatorname{dist}\big[\varsigma,\mathcal{T}(t+\delta,x+\delta(w+\gamma))\big]}{\delta}$$
$$\leqslant \liminf_{\delta\downarrow 0,\gamma\in\mathbb{R}^n,\|\gamma\|\downarrow 0} \frac{\operatorname{dist}\big[\varsigma,\mathcal{T}(t+\delta,x+\delta(w^*+\gamma))\big]}{\delta} \leqslant \lim_{r\to\infty} \frac{\operatorname{dist}\big[\varsigma,\mathcal{T}(t+\hat{\delta}^r,x+\hat{\delta}^r(w^*+\hat{\gamma}^r))\big]}{\hat{\delta}^r}. \tag{3.5}$$

Далее,

$$\frac{\operatorname{dist}\big[\varsigma,\mathcal{T}(t+\hat{\delta}^r,x+\hat{\delta}^r(w^*+\hat{\gamma}^r))\big]}{\hat{\delta}^r}$$
$$= \frac{\operatorname{dist}\big[\varsigma,\mathcal{T}(t+\delta^{r,\hat{k}(r)},x+\delta^{r,\hat{k}(r)}(w^*+\gamma^{r,\hat{k}(r)}+w^r-w^*))\big]}{\delta^{r,\hat{k}(r)}}$$
$$= \frac{\operatorname{dist}\big[\varsigma,\mathcal{T}(t+\delta^{r,\hat{k}(r)},x+\delta^{r,\hat{k}(r)}(w^k+\gamma^{r,\hat{k}(r)}))\big]}{\delta^{r,\hat{k}(r)}} \leqslant b^r + 2^{-r} \to \tilde{b}, \quad r\to\infty.$$

Имеем, что в (3.5) правая и левая части равны; это означает, что (3.4) верно.

Таким образом, условие (2.2) эквивалентно тому, что для всех $\varsigma\in\mathcal{T}(t,x)$ существует некоторое $w\in\mathcal{F}(t,x)$ со свойством

$$\liminf_{\delta\downarrow 0,\gamma\in\mathbb{R}^n,\|\gamma\|\downarrow 0} \frac{\operatorname{dist}\big[\varsigma,\mathcal{T}(t+\delta,x+\delta(w+\gamma))\big]}{\delta}$$
$$= \liminf_{\delta\downarrow 0,\gamma\in\mathbb{R}^n,\|\gamma\|\downarrow 0} \inf\left\{\frac{|\zeta_1-\varsigma_1|+\ldots+|\zeta_m-\varsigma_m|}{\delta} : (\zeta_1,\ldots,\zeta_m)\in\mathcal{T}(t+\delta,x+\delta(w+\gamma))\right\} = 0. \tag{3.6}$$

Теперь докажем, что это условие эквивалентно условию (3.3).

Предположим вначале, что выполнено условие (3.3). Это означает, что существуют последовательности $\{\delta^k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$, $\{\gamma^k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}^n$, $\{\varepsilon_1^k\}_{k=1}^{\infty},\ldots,\{\varepsilon_m^k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ такие, что

- $\delta^k, \|\gamma^k\|, \varepsilon_1^k,\ldots,\varepsilon_m^k \to 0$, $k\to\infty$;
- $\Big(t+\delta^k, x+\delta^k(w+\gamma^k), \varsigma_1+\delta^k\varepsilon_1^k,\ldots,\varsigma_m+\delta^k\varepsilon_2^k\Big)\in\operatorname{gr}\mathcal{T}$.

Второе условие можно переформулировать в виде

$$(\varsigma_1+\delta^k\varepsilon_1^k,\ldots,\varsigma_m+\delta^k\varepsilon_m^k)\in\mathcal{T}(t+\delta^k,t+\delta^k(w+\gamma^k)).$$

Таким образом,

$$\inf\left\{\frac{|\zeta_1-\varsigma_1|+\ldots+|\zeta_m-\varsigma_m|}{\delta^k}:(\zeta_1,\ldots,\zeta_m)\in\mathcal{T}(t+\delta^k,x+\delta(w+\gamma^k))\right\}=\varepsilon_1^k+\ldots+\varepsilon_m^k.$$

В силу выбора последовательностей $\{\varepsilon_1^k\}$, ..., $\{\varepsilon_m^k\}$ получаем, что (3.6) выполняется.

Пусть теперь верно (3.6), докажем, что выполняется (3.3). В самом деле, пусть $\{\delta^k\}_{k=1}^\infty$, $\{\gamma\}_{k=1}^\infty$ — минимизирующая последовательность. В силу компактности образов $\mathcal{T}\bigl(t+\delta^k,x+\delta^k(w+\gamma^k)\bigr)$ для каждого k найдутся такие ε_1^k,..., ε_m^k, что

$$\bigl(\varsigma_1+\delta^k\varepsilon_1^k,\ldots,\varsigma_m+\delta^k\varepsilon_m^k\bigr)\in\mathcal{T}(t,x+\delta^k(w+\gamma^k)).$$

Из (3.6) следует, что $\varepsilon_1^k,\ldots,\varepsilon_m^k\to0$, $k\to\infty$. Оценим $\mathrm{d}\Bigl((w+\delta^kw,\varsigma_1,\ldots,\varsigma_m),\mathrm{gr}\,\mathcal{T}[t+\delta^k]\Bigr)$. В самом деле,

$$\Bigl(t+\delta^k,x+\delta^k(w+\gamma^k),\varsigma_1+\delta^k\varepsilon_1^k,\ldots,\varsigma_m+\delta^k\varepsilon_m^k\Bigr)\in\mathrm{gr}\,\mathcal{T}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{d}\Bigl((w+\delta^kw,\varsigma_1,\ldots,\varsigma_m),\mathrm{gr}\,\mathcal{T}[t+\delta^k]\Bigr)\leqslant\delta^k\sqrt{\|\gamma^k\|^2+(\varepsilon_1^k)^2+\ldots+(\varepsilon_m^k)^2}.$$

Сходимость $\delta^k,\|\gamma^k\|,\varepsilon_1^k,\ldots,\varepsilon_m^k\to0$ дает включение

$$(w,0,\ldots,0)\in D_t(\mathrm{gr}\,\mathcal{T})(t,x,\varsigma_1,\ldots,\varsigma_m).$$

В силу того, что $\widehat{\mathcal{F}}(t,x)=\mathcal{F}\times\{(0,\ldots,0)\}$, заключаем, что (3.3) верно. □

Доказательство предложения 2. Из (2.4) и представления мер-управлений как выпуклых комбинаций следует, что

$$\begin{aligned}\bigl\langle\nabla\varphi_1(t,x),f(t,x,u_1^*,\ldots,u_m^*)\bigr\rangle\geqslant\max_{\mu\in\mathcal{R}(t;P_i)}\min_{\nu\in\mathcal{R}(t;Q_i)}\\ \int_{P_i}\int_{Q_i}\langle s,f(t,x,u_1,\ldots,u_{i-1},u_i,u_{i+1},\ldots,u_m)\rangle\mu(t,du_i)\nu(t,d(u_1,\ldots,u_{i-1},u_{i+1},\ldots,u_m))\\ =H_1(t,x,\nabla\varphi_1(t,x)).\end{aligned}$$

Аналогично получаем, что

$$\bigl\langle\nabla\varphi_i(t,x),f(t,x,u_1^*,\ldots,u_m^*)\bigr\rangle\geqslant H_i(t,x,\nabla\varphi_i(t,x)),\quad i=\overline{2,m}.$$

Отсюда и из условия (2.5) заключаем, что

$$\frac{\partial\varphi_i(t,x)}{\partial t}+H_i(t,x,\nabla\varphi_i(t,x))\leqslant0,\quad i=\overline{1,m}.$$

Поскольку функция φ_i дифференцируема, то ее субдифференциал в позиции (t,x) равен $\{\partial\varphi_1(t,x)/\partial t,\nabla\varphi_1(t,x)\}$. Следовательно, функция φ_1 является верхним решением уравнения (2.3) при $i=1$ (см. [7, условие (U4)]). Аналогично, функция φ_2 является верхним решением уравнения (2.3) при $i=2$.

Покажем, что $\mathrm{d}_{abs}(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)(t,x;w)=0$ для некоторого $w\in\mathcal{F}(t,x)$. А именно, для $w=f(t,x,u_1^*,\ldots,u_m^*)$. В самом деле,

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}_{abs}(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)(t,x;w)\\ &=\liminf_{\delta\downarrow0,\|\gamma\|\to0}\frac{|\varphi_1(t+\delta,x+\delta(w+\gamma))-\varphi_1(t,x)|+\ldots+|\varphi_m(t+\delta,x+\delta(w+\gamma))-\varphi_m(t,x)|}{\delta}.\end{aligned}$$

Пусть $\{\delta^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $\{\gamma^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ — минимизирующие последовательности. Тогда

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}_{abs}(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)(t, x; w) \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{|\varphi_1(t+\delta^k, x+\delta^k(w+\gamma^k)) - \varphi_1(t,x)| + \ldots + |\varphi_m(t+\delta^k, x+\delta(w+\gamma^k)) - \varphi_m(t,x)|}{\delta^k} \\
&\qquad = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\delta^k}\Big[\Big|\frac{\partial\varphi_1(t,x)}{\partial t}\delta^k + \langle \nabla\varphi_1(t,x), \delta^k(w+\gamma^k)\rangle + o(\delta^k)\Big| + \ldots \\
&\qquad\qquad + \Big|\frac{\partial\varphi_m(t,x)}{\partial t}\delta^k + \langle \nabla\varphi_m(t,x), \delta^k(w+\gamma^k)\rangle + o(\delta^k)\Big|\Big] \\
&\qquad = \Big|\frac{\partial\varphi_1(t,x)}{\partial t} + \langle \nabla\varphi_1(t,x), w\rangle\Big| + \Big|\frac{\partial\varphi_2(t,x)}{\partial t} + \ldots + \langle \nabla\varphi_m(t,x), w\rangle\Big|.
\end{aligned}$$

В силу выбора $w = f(t, x, u_1^*, \ldots, u_m^*)$ и условия (2.5) имеем, что оба модуля равны 0. Таким образом, $\mathrm{d}_{abs}(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)(t, x; w) = 0$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
2. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. — М.: Наука, 1985. — 518 с.
3. Клейменов А. Ф. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. — Екатеринбург: Наука. Уральское отделение, 1993. — 185 с.
4. Кононенко А. Ф., Чистяков Ю. Е. О равновесных позиционных стратегиях в дифференциальных играх многих лиц // Доклады АН СССР. — 1988. — Т. 299, №5. — С. 1053–1056.
5. Чистяков С. В. О бескоалиционных дифференциальных играх // Доклады АН СССР. — 1981. — Т. 259, №5. — С. 1052–1055.
6. Basar T., Olsder G. J. Dynamic Noncooperative Game Theory. London/New York: Academic Press, 1995. — 535 p.
7. Субботин А. И. Обобщенные решения дифференциальных уравнений 1-го порядка. Перспективы динамической оптимизации. — Ижевск: РХД, 2003. — 336 с.
8. Guseinov H. G., Subbotin A. I., Ushakov V. N. Derivatives for multivalued mappings with applications to game-theoretical problems of control // Probl. Contr. Inform. Theory. — 1985. — Vol. 14, № 3. — P. 155–167.

Поступила в редакцию 09.12.10

Yu. V. Averboukh

Infinitesimal characterization of Nash equilibrium for differential games with many players

We study Nash equilibrium for a differential game with many players. The condition on a multivalued map under which any value of this map is a set of Nash equilibrium payoffs is obtained. This condition is written in infinitesimal form. The sufficient condition for the given complex of continuous functions to provide a Nash equilibrium is obtained. This condition is a generalization of the method based on system of Hamilton–Jacobi equations.

Keywords: Nash equilibrium, differential games, generalized derivatives.

Mathematical Subject Classifications: 49N70, 91A10, 49L25

Авербух Юрий Владимирович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел управляемых систем, Институт математики и механики УрО РАН. 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16. E-mail: ayv@imm.uran.ru