УДК 517.925+517.938.5

© *А. В. Болсинов, А. В. Борисов, И. С. Мамаев*

Численные процедуры нахождения топологических инвариантов[1]

В работе предложен общий топологический подход к исследованию устойчивости периодических решений интегрируемых динамических систем с двумя степенями свободы. Развиваемые методы проиллюстрированы на примерах нескольких интегрируемых задач, связанных с классическими уравнениями Эйлера–Пуассона, движением твердого тела в жидкости, а также динамикой газообразных расширяющихся эллипсоидов. Данные топологические методы позволяют также отыскивать невырожденные периодические решения интегрируемых систем, что является особенно актуальным в тех случаях, когда общее решение, например, при помощи разделения переменных неизвестно.

Ключевые слова: топология, устойчивость, периодические траектории, бифуркационная диаграмма

Введение

В настоящей работе развивается общий подход к проблеме устойчивости для интегрируемых динамических систем, основанный на систематическом применении методов топологического анализа. Во многом этот подход является естественным развитием идей В. В. Козлова о применении топологических методов к качественному анализу *динамики* механических систем. Эти методы особенно наглядно продемонстрировали свою продуктивность в задачах динамики твёрдого тела. Такой подход, в частности, позволяет наиболее эффективным образом (в сравнении со стандартными методами) определять устойчивость в случае интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы — важнейшего класса динамических систем, представленного многочисленными примерами из механики и других прикладных областей. Нашей главной целью, в этой связи, было сделать доступным широкому кругу исследователей математически строгое изложение общей теории и результатов. Мы надеемся, что развиваемые здесь методы окажутся полезными и более удобными при исследованиях на практике для специалистов, изучающих конкретные механические системы, где вопросы устойчивости имеют принципиальное значение.

В данной работе ставится задача поиска устойчивых периодических решений интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Очень часто при анализе устойчивости периодических решений и неподвижных точек не делают различия между интегрируемыми и неинтегрируемыми системами и пользуются общими методами основанными на вычислении мультипликаторов, нормализующих преобразованиях Биркгофа, изучении областей резонансов и так называемых связок интегралов, см., например, [2, 3, 4, 5, 6, 7].

Как будет показано ниже, предлагаемый нами метод, естественным образом используя интегрируемость системы, позволяет быстрым и наглядным образом определять устойчивость в тех случаях, когда использование общих стандартных методов является довольно затруднительным.

§ 1. Постановка задачи

Пусть задана гамильтонова система с двумя степенями свободы, которая в канонических переменных $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2)$, $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$ задается в виде

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, \quad \dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}, \tag{1.1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (код проекта 2009-1.5-503-004-019). Работа А. В. Болсинова выполнена при поддержке гранта ведущей научной школы НШ-660.2008.1. Работа И. С. Мамаева выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для поддержки молодых докторов наук (код проекта МД-5239.2008.1).

где $H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ — гамильтониан. Будем предполагать, что система обладает дополнительным первым интегралом $F(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ и следовательно является интегрируемой. Здесь и далее точку на многообразии и фазовые переменные мы будем обозначать через $\boldsymbol{x}$, в частности, в данном случае $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$.

Напомним теорему Лиувилля–Арнольда, которая описывает поведение таких систем в ситуации общего положения (см. например [1]).

Теорема 1. Пусть на симплектическом многообразии $\mathcal{M}^4$ задана пара функций $H(\boldsymbol{x})$, $F(\boldsymbol{x})$ в инволюции, то есть

$$\{H,F\} = 0,$$

тогда уравнения (1.1) интегрируются в квадратурах. Пусть $\mathcal{M}_{h,\,f} = \{\,\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}^4 \mid H=h,\ F=f\,\}$ — совместный уровень первых интегралов, если на $\mathcal{M}_{h,f}$ функции H и F независимы, то

1. $\mathcal{M}_{h,f}$ — гладкое многообразие, инвариантное относительно фазового потока системы (1.1);
2. всякая компактная связная компонента поверхности $\mathcal{M}_{h,f}$ диффеоморфна двумерному тору;
3. в окрестности связной компактной компоненты $\mathcal{M}_{h,f}$ можно выбрать переменные действие-угол $\boldsymbol{I} = (I_1, I_2)$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1,\varphi_2 \mod 2\pi)$, для которых $H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = H(\boldsymbol{I})$, и система (1.1) представляется в форме
$$\dot{\boldsymbol{I}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{I}} = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I}).$$

Величины $\omega_1(\boldsymbol{I})$, $\omega_2(\boldsymbol{I})$ могут быть вычислены как функции исходных интегралов движения, то есть $\omega_i(H,F), i=1,2$, и называются частотами движения.

Таким образом, в компактном случае все фазовое пространство $\mathcal{M}^4$ расслоено на инвариантные торы и особые слои, объединяющиеся в различные семейства. Можно выделить четыре существенно различных класса траекторий: периодические, квазипериодические, неподвижные точки и асимптотические (то есть траектории, приближаются к периодическим решениям и неподвижным точкам системы (1.1)).

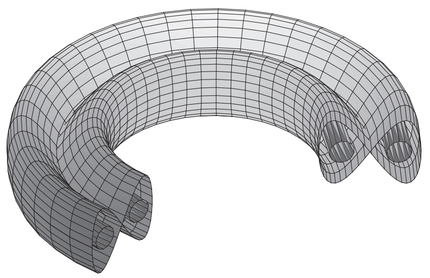

Рис. 1. Лиувиллевы торы и особое многообразие, примыкающее к неустойчивому периодическому решению

Наша цель:
выделить периодические решения (*замкнутые траектории*) *системы* (1.1) *и исследовать их* (*орбитальную*) *устойчивость.*

В приложениях, как правило, встречаются более сложные системы, для которых фазовое пространство является пуассоновым многообразием $\mathcal{M}$ со скобкой Пуассона

$$\{x_i, x_j\} = J_{ij}(\boldsymbol{x}), \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ — некоторые координаты на $\mathcal{M}$ [1]. Как и выше будем предполагать, что *пуассонова структура* $\mathbf{J} = \big(J_{ij}(x)\big)$ *является аналитической.*

Гамильтонова система на $\mathcal{M}$

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.3}$$

где $H(\boldsymbol{x})$ — функция Гамильтона, является естественным обобщением системы (1.1), рассмотренной выше.

Как известно [1, **?**], пуассоново многообразие расслаивается на симплектические листы, которые являются симплектическими многообразиями. В данном случае мы будем предполагать, что симплектический лист четырехмерен (то есть $\operatorname{rank}\mathbf{J} = 4$) и функции Казимира $K_1, \ldots K_m$ — аналитические. Симплектический лист обозначим как

$$\mathcal{M}_c = \{\boldsymbol{x} | K_1(\boldsymbol{x}) = c_1, \ldots, K_m(\boldsymbol{x}) = c_m\}.$$

При ограничении системы (1.3) на симплектический лист $\mathcal{M}_c$ получим обычную двухстепенную гамильтонову систему, аналогичную (1.1), с гамильтонианом $H_c = H|_{\mathcal{M}_c}$, который явно зависит от величин $c_1, \ldots c_m$. Таким образом, в данном случае мы получаем семейство гамильтовых систем, зависящих от параметров $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_m)$ — констант функций Казимира.

Мы будем предполагать, что система (1.3) допускает дополнительный первый интеграл $F(\boldsymbol{x})$, по крайней мере при некоторых значениях параметра $\boldsymbol{c}$. Если система имеет дополнительный интеграл на всем $\mathcal{M}$, то она интегрируема на всех симплектических листах, в то же время возможны ситуации, когда система интегрируема лишь на отдельных листах.

§ 2. Бифуркационная диаграмма и типы периодических траекторий

Через $\Phi = (H, F) : \mathcal{M}^4 \to \mathbb{R}^2$ мы обозначим интегральное отображение интегрируемой системы:

$$\boldsymbol{x} \mapsto \Phi(\boldsymbol{x}) = (H(\boldsymbol{x}), F(\boldsymbol{x})) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.1}$$

В некоторых работах это отображение называется также отображение энергии-момента, либо просто отображение момента.

Определим ряд объектов, играющих важную роль в исследовании периодических решений:

1. *Область возможных движений* (*ОВД*) $\Phi(\mathcal{M})$ — полный образ фазового пространства на плоскости первых интегралов (h, f). (Всякой точке $(h, f) \in \Phi(\mathcal{M})$ соответствует интегральное многообразие системы $\mathcal{M}_{h,f} = \{H(\boldsymbol{x}) = h, F(\boldsymbol{x}) = f\}$, которое, вообще говоря, может содержать несколько связных компонент).

2. *Множество критических точек* S *интегрального отображения*

$$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M} | \operatorname{rank} \mathrm{d}\Phi(\boldsymbol{x}) < 2\}$$

3. *Бифуркационное множество первых интегралов* Σ — образ множества критических точек $\Sigma = \Phi(S)$, то есть значения первых интегралов соответствующие критическим точкам интегрального отображения.

Замечание 1. Во многих работах под областью возможных движений понимается проекция интегрального многообразия $\mathcal{M}_{h,f}$ на конфигурационное пространство. Мы употребляем этот термин в другом смысле.

Замечание 2. Во многих работах бифуркационной диаграммой называют только бифуркационное множество Σ (зачастую даже без выделения подмножества Σ_0). Здесь мы пользуемся несколько иной терминологией.

Точки (h, f) на бифуркационной диаграмме определяют различные типы интегральных многообразий $\mathcal{M}_{h,f}$ и траекторий системы. Отметим, однако, что если мы хотим использовать бифуркационную диаграмму для того, чтобы сделать выводы о самой системе, то необходимо соблюдать определенную осторожность: бифуркационная диаграмма часто помогает угадать правильный ответ, но без дополнительной информации мы почти никогда не сможем однозначно интерпретировать события, происходящие в фазовом пространстве. Мы приведем здесь описание наиболее типичных ситуаций, которые следует иметь в виду при работе с конкретными примерами, а затем прокомментируем менее типичные сценарии.

1. *Если* $(h, f) \in \Phi(\mathcal{M})\backslash\Sigma$ *, то*

   $\mathcal{M}_{h,f}$ *— один или несколько торов Лиувилля описываемых теоремой 1, кроме того*

   на каждом из торов в зависимости от соотношения частот ω_1, ω_2 траектории системы (1.1) задают периодические $\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \text{ — рациональное}\right)$, либо квазипериодические $\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \text{ — иррациональное}\right)$ обмотки.

2. *Если* $(h, f) \in \Sigma_1$ *, то*

   $\mathcal{M}_{h,f}$ *— набор замкнутых кривых* γ_i *и особых двумерных многообразий примыкающих к (неустойчивым) периодическим решениям, кроме того*

   всякая замкнутая кривая γ_i соответствует либо периодическим решениям, либо состоит из неподвижных точек системы (1.1) (кривая состоит из неподвижных точек тогда и только тогда, когда касательная к кривой Σ_1 в точке (h, f) параллельна прямой $h = \mathrm{const}$);

   всякое особое двумерное многообразие заполнено либо траекториями асимтотическими к соответствующему периодическому решению, либо периодическими траекториями.

3. *Если* $(h, f) \in \Sigma_0$ *, то*

   $\mathcal{M}_{h,f}$ *— набор точек* P_i *и особых двумерных или одномерных многообразий, примыкающих к неустойчивым неподвижным точкам, причем*

   всякая точка P_i является неподвижной точкой системы (1.1);

   особые двумерные многообразия заполнены, решениями асимптотическими к соответствующим неподвижным точкам, либо периодическими траекториями.

§ 3. Бифуркационный комплекс волчка Горячева–Чаплыгина

Чтобы построить бифуркационный комплекс волчка Горячева–Чаплыгина напомним, что каждой точке (h, f) соответствует пара инвариантных торов, то есть здесь имеется пара листов бифуркационного комплекса, а в точке касания P_1 происходит ветвление (см. рис. 2).

Вертикальная ось на этом рисунке не имеет физического смысла и используется лишь для удобства визуализации различных листов. Устойчивость критических решений отмечена на рисунке знаками « $+$ » (устойчивые) и « $-$ » (неустойчивые).

Таким образом мы видим, что для случая Горячего–Чаплыгина:

в фазовом пространстве системы имеется четыре семейства устойчивых периодических траекторий (других устойчивых орбит нет).

§ 4. Бифуркационные комплексы случая Клебша

Возможные бифуркационные комплексы в случае Клебша можно построить, пользуясь следующими наблюдениями .

1. Различные листы бифуркационного комплекса могут склеиваться только по тем ветвям бифуркационной диаграммы, которые лежат внутри ОВД (в невырожденном случае им соответствуют гиперболические периодические решения), причем в этом случае на одном и том же (особом) слое $\mathcal{M}_{h,f}$ лежит несколько различных гиперболических решений.

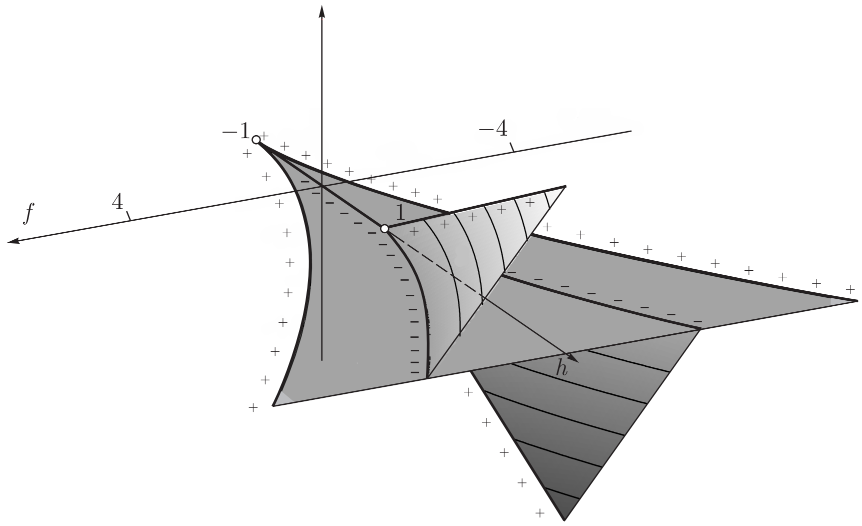

Рис. 2. Бифуркационный комплекс волчка Горячева–Чаплыгина. Знаком « + » помечены устойчивые критические периодические решения, а знаком « − » — неустойчивые

2. Если точкам на граничных ветвях бифуркационной диаграммы соответствует несколько периодических траекторий в фазовом пространстве, то каждой такой траектории соответствует отдельный лист на бифуркационном комплексе.

3. Точки возврата (каспы на бифуркационной диаграмме), как правило, являются точками ветвления листов бифуркационного комплекса.

4. Количество листов и характер их склейки удобнее всего определить в окрестности точек множества Σ_0 .

Таким образом, пользуясь бифуркационными комплексами на рис. 3, 4, несложно описать все устойчивые и неустойчивые критические периодические траектории и неподвижные точки для случая Клебша. Отметим лишь, что нужно быть аккуратным при «чтении» этих бифуркационных комплексов, так например, нужно помнить, что кривая γ_3 , хотя и не расслаивается на этих рисунках тем не менее соответствует паре семейств неустойчивых траекторий, лежащих на одном и том же особом слое.

Окончательно получим:

В случае Клебша при всяком значении постоянной площадей c *имеется шесть однопараметрических семейств устойчивых периодических орбит* (*которые на рис.* 3–5 *отмечены знаком* « + »), *других устойчивых периодических траекторий нет.*

§ 5. Заключение

В заключение отметим некоторые перспективы дальнейшего развития этого подхода как в общетеоретическом, так и в прикладном направлениях. Практический аспект связан с расширением области применения данных методов. Они могут быть применены для качественного анализа многих конкретных задач из различных областей механики и математической физики. Например, в задачах неголономной механики, где, оказывается, существует целая иерархия динамического поведения интегрируемых систем. Динамическое поведение может быть близко к гамильтонову, а может отличаться. Так, в неголономной механике может отсутствовать инвариантная мера, хотя и существовать такое же слоение на интегральные двумерные компактные многообразия. Недавно наш метод был апробирован для нахождения и определения

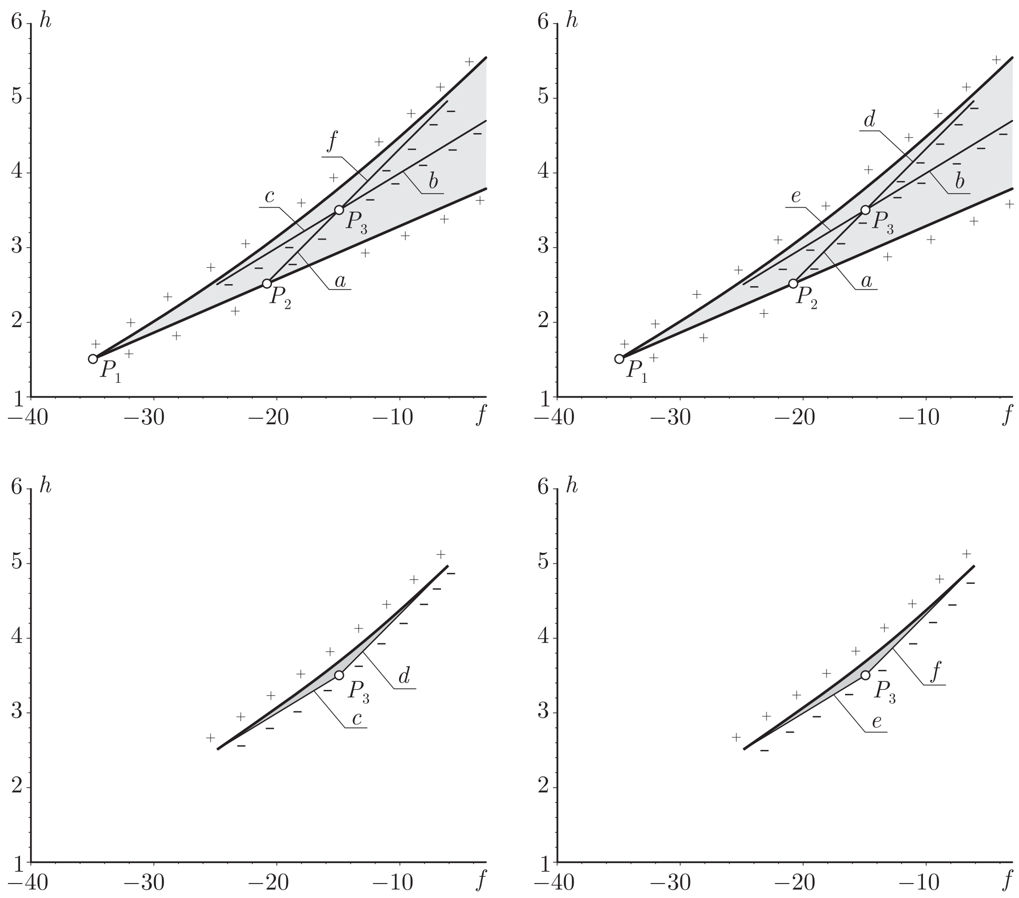

Рис. 3. Отдельные листы и порядок склейки бифуркационного комплекса при $(\mu \det \mathbf{I})^{-1/2}c < \sqrt{a_1 - a_3} - \sqrt{a_2 - a_3}$: кривые помеченные одинаковыми буквами склеиваются между собой.

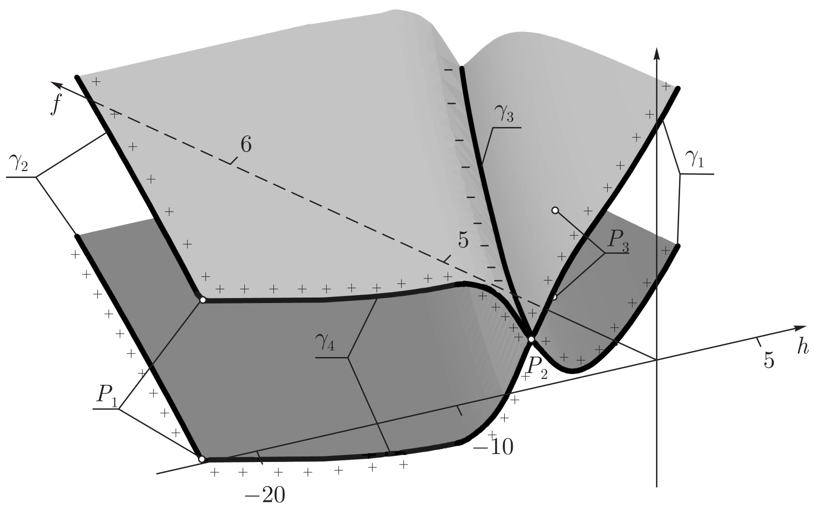

Рис. 4. Бифуркационный комплекс при $\sqrt{a_1 - a_3} - \sqrt{a_2 - a_3} < (\mu \det \mathbf{I})^{-1/2}c < \sqrt{a_1 - a_3} + \sqrt{a_2 - a_3}$.

устойчивости частных решений задачи о шаре Чаплыгина с гиростатом [8]. Было бы интересно исследовать таким образом и другие задачи из неголономной механики, например, шаровой подвес Федорова, движение резинового тела и др. Данные топологические методы также приложимы к анализу задач вихревой динамики, в частности, задач о движении точечных вихрей на плоскости и сфере [10], а также динамики твердого тела, взаимодействующего с точечными

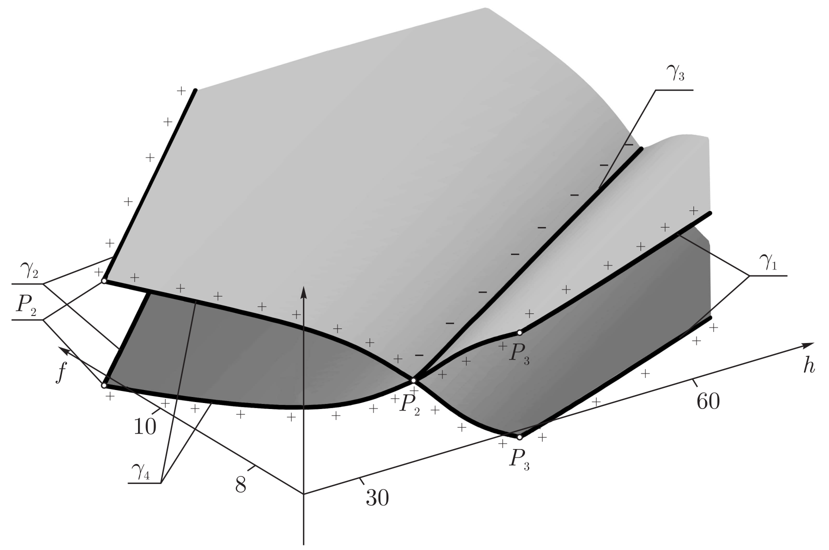

Рис. 5. Бифуркационный комплекс при $(\mu \det \mathbf{I})^{-1/2} c > \sqrt{a_1 - a_3} + \sqrt{a_2 - a_3}$

вихрями [11, 12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация, т. 1, 2, РХД, Ижевск, 1999; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification, Chapman & Hall, CRC, Boca Raton, FL, 2004

2. Б. С. Бардин, К задаче об устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина // Изв. РАН. МТТ. 2007. №2. С. 14–21.

3. А. В. Карапетян, Инвариантные множества в задаче Горячева–Чаплыгина: существование, устойчивость и ветвление // Прикл. матем. и мех. Т. 70, вып. 2, 2003. с. 221–224.

4. А. В. Карапетян, Инвариантные множества в задаче Клебша–Тиссерана: существование и устойчивость // Прикл. матем. и мех. Т. 70. Вып. 6, 2006. с. 959–964.

5. Маркеев А. П., Об устойчивости плоских движений твёрдого тела в случае Ковалевской // ПММ, 2001, 65(1), С. 51–58.

6. Маркеев А. П., Медведев С. В., Чеховская Т. Н., К задаче об устойчивости маятниковых движений твёрдого тела в случа Ковалевской // Изв. РАН, МТТ, 2003, №1, С. 3–9.

7. Маркеев А. П., О маятникообразных движениях твёрдого тела в случае Горячева–Чаплыгина // ПММ, 2004, 68(2), С. 282–293.

8. А. Ю. Москвин. Шар Чаплыгина с гиростатом: особые решения. Нелинейная динамика, 2009, т. 5, №3, с. 345–356.

9. В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, Математические аспекты классической и небесной механики // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.3. М.: ВИНИТИ. 1985. 304 с.; англ. пер.: V. I. Arnold, V. V. Kozlov, A. I. Neishtadt, Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics. Dynamical Systems, III, Encyclopaedia Math. Sci., 3, Springer, Berlin, 1993.

10. A. V. Bolsinov, A. V. Borisov, I. S. Mamaev, Lie algebras in vortex dynamics and celestial mechanics — IV. Regular and Chaotic Dynamics, 1999, 4(1), P. 23–50.

11. A. V. Borisov, I. S. Mamaev, S. M. Ramodanov, Motion of a circular cylinder and n point vortices in a perfect fluid. Regular and Chaotic Dynamics, 2003, 8(4), P. 449–462.

12. A. V. Borisov, I. S. Mamaev, S. M. Ramodanov, Dynamic Interaction of Point Vortices and a Two-Dimensional Cylinder. J. Math. Phys., 2007, 48(6), 065403 (9 pages).

интегралов // ПММ, 1989, том 53, вып. 6, с. 873–879.

Поступила в редакцию 01.03.10

A. V. Bolsinov, A. V. Borisov, I. S. Mamaev

Topology and stability of integrable systems

In this paper a general topological approach is proposed for the study of stability of periodic solutions of integrable dynamical systems with two degrees of freedom. The methods developed are illustrated by examples of several integrable problems related to the classical Euler–Poisson equations, the motion of a rigid body in a fluid, and the dynamics of gaseous expanding ellipsoids. These topological methods also enable one to find non-degenerate periodic solutions of integrable systems, which is especially topical in those cases where no general solution (for example, by separation of variables) is known.

Keywords: topology, stability, periodic trajectory, critical set, bifurcation set, bifurcation diagram.

Mathematical Subject Classifications: 37Jxx

Болсинов Алексей Викторович, д.ф.-м.н., School of Mathematics, Loughborough University Ashby Road, Loughborough, LE11 3TU, UK. Механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1 E-mail: A.Bolsinov@lboro.ac.uk

Борисов Алексей Владимирович, д.ф.-м.н., Удмуртский государственный университет, Институт компьютерных исследований, 426034, Ижевск, ул. Университетская, д. 1. E-mail: borisov@rcd.ru

Мамаев Иван Сергеевич, д.ф.-м.н., Удмуртский государственный университет, Институт компьютерных исследований, 426034, Ижевск, ул. Университетская, д. 1. E-mail: mamaev@rcd.ru