УДК 519.651 + 517.518.823

© *В. И. Родионов*

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Исследовано однопараметрическое семейство квадратичных интерполяционных многочленов нескольких переменных. В роли параметра выступает точка n-мерного пространства. Исследованы вопросы существования и единственности интерполяционных многочленов. Для многочленов получено явное представление (в барицентрической системе координат). Показано, что лишь для одного-единственного параметра имеет место непрерывная стыковка интерполяционных многочленов, построенных на элементах триангуляции специального вида. Для интерполяционного многочлена, соответствующего данному параметру, получено явное представление в декартовой системе координат. Применение интерполяции с данным параметром позволяет осуществлять квадратичную сплайн-аппроксимацию функций многих переменных (одновременно с аппроксимацией поля градиента этой функции).

Ключевые слова: интерполяция, аппроксимация, многомерный сплайн, градиент, симплекс, барицентрическая система координат.

§ 1. Аппроксимация поля градиента функции нескольких переменных

Пусть $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ — непустое открытое множество; множество Ω таково, что $\Omega_0 \subseteq \Omega \subseteq \overline{\Omega}_0$ (где $\overline{\Omega}_0$ — это замыкание Ω_0); множество Ω_*^{n+1} состоит из таких упорядоченных наборов $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$, $x_i \in \Omega$, что векторы $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ (где $\Delta x_i \doteq x_i - x_0$) образуют ортогональный репер с началом в точке x_0, причем выпуклая оболочка $\operatorname{conv}\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ содержится в Ω. Совокупности $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$ называем симплексами. Матрица $\Delta x \doteq \operatorname{col}(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ состоит из элементов $\Delta x_{ij} \doteq x_{ij} - x_{0j}$, где через x_{ij} обозначена j-ая координата точки x_i. Так как $\Delta x \cdot \Delta x^\top = \operatorname{diag}(\|\Delta x_1\|^2, \ldots, \|\Delta x_n\|^2)$, то матрица Δx невырожденная.

Произвольной функции $f : \Omega \to \mathbb{R}$ поставим в соответствие функцию $F : \Omega_*^{n+1} \to \mathbb{R}^n$,

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \Delta x_{11} & \ldots & \Delta x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta x_{n1} & \ldots & \Delta x_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \vdots \\ \Delta f_n \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где $\Delta f_i \doteq f(x_i) - f(x_0)$. Если $\Delta f \doteq \operatorname{col}(\Delta f_1, \ldots, \Delta f_n)$, то формула (1.1) принимает компактный вид $F = (\Delta x)^{-1} \Delta f$, а при $n = 1$ применима традиционная запись $F = \frac{\Delta f}{\Delta x}$. Заметим еще, что более правильно следовало бы писать $F = F(\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle)$, однако мы будем придерживаться формата (1.1). Отображение $f \to F$, порожденное формулой (1.1), имеет канонический характер, и мы исследуем его с самых разных позиций (см., например, работы [1]–[2]).

Определение 1 (см. [1]). Функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *S-дифференцируемой* (или *дифференцируемой в себе*), если для любого $x \in \Omega$ существует конечный предел

$$\lim\nolimits_* F(x_0, x_1, \ldots, x_n), \tag{1.2}$$

где символ «$*$» означает, что предел вычисляется по всем симплексам $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle \in \Omega_*^{n+1}$ таким, что $x_0 \to x, x_1 \to x, \ \ldots, x_n \to x$. Другими словами, вектор $\mathrm{g}(x)$ есть предел (1.2), если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U_x такая, что $\|F(x_0, x_1, \ldots, x_n) - \mathrm{g}(x)\| < \varepsilon$ для любых $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \Omega \cap U_x$ таких, что $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle \in \Omega_*^{n+1}$. Заметим еще, что (1.2) — это предел по множеству Ω_*^{n+1}, а точка $(x, x, \ldots, x) \in \Omega^{n+1}$ — его точка прикосновения.

При $n=1$ предел (1.2) имеет вид $\lim\limits_{x_0\to x,\, x_1\to x} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ и встречается в работах Пеано.

Теорема 1 (см. [1]). *Если $f:\Omega_0\to\mathbb{R}$ есть функция S-дифференцируемая, то для любого $x\in\Omega_0$ существует* $\operatorname{grad} f(x)$, *и для предела* (1.2) *справедливо равенство*

$$\lim\nolimits_* F(x_0,x_1,\ldots,x_n)=\operatorname{grad} f(x). \tag{1.3}$$

Теорема 2 (см. [1]). *Для того чтобы непрерывная функция $f:\Omega\to\mathbb{R}$ была S-дифференцируемой, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывно дифференцируемой.*

Замечание 1. Непрерывность функции $f:\Omega\to\mathbb{R}$ мы требуем для того, чтобы исключить из рассмотрения разрывные функции следующего вида. Пусть множество $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ состоит из точек (ξ_1,ξ_2) таких, что $0\leqslant\xi_1\leqslant 1$ и $\xi_1^3\leqslant\xi_2\leqslant\xi_1^2$, а функция $f:\Omega\to\mathbb{R}$ такова, что $f(\xi_1,\xi_2)=\xi_1+\xi_2$ при $(\xi_1,\xi_2)\neq(0,0)$ и $f(0,0)=1$. Для любого $x\in\Omega$ (в том числе для $x=0$) существует предел $\lim_* F(x_0,x_1,x_2)=\operatorname{col}(1,1)$ при $x_0\to x,\ x_1\to x,\ x_2\to x$, однако сама функция f разрывна на границе Ω. Условие непрерывности f можно снять лишь в том случае, когда $\Omega=\Omega_0$ — открытое множество.

Формула (1.3) служит отправной точкой для приближенных вычислений, основанных на соотношении

$$\operatorname{grad} f(x)\approx F(x_0,x_1,\ldots,x_n). \tag{1.4}$$

В этом направлении решена следующая задача. Пусть заданы симплекс $\langle x_0,x_1,\ldots,x_n\rangle\in\Omega_*^{n+1}$, числа $p_0,p_1,\ldots,p_n$ и числа q_{ij}, $i,j=1,\ldots,n$, такие, что $q_{ij}=q_{ji}$, $q_{ii}=p_i$.

Теорема 3 (см. [2]). *В семействе всех полиномов второй степени от n переменных вида $P(\xi)=(A\xi,\xi)+(b,\xi)+c$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, существует ровно один полином, удовлетворяющий следующим условиям:* 1) *матрица A симметрична;* 2) $P(x_i)=p_i$ *для всех* $i=0,1,\ldots,n$; 3) $P(\frac12 x_i+\frac12 x_j)=q_{ij}$ *для всех* $i,j=1,\ldots,n$;

$$4)\ \operatorname{grad} P(x_0)=\begin{pmatrix}\Delta x_{11} & \ldots & \Delta x_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \Delta x_{n1} & \ldots & \Delta x_{nn}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}P(x_1)-P(x_0)\\ \vdots\\ P(x_n)-P(x_0)\end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Этот полином представим в виде

$$P(\xi)=\sum_{i,j=1}^{n}(2\,q_{ij}-p_i-p_j)\,\frac{(\xi-x_0,\,\Delta x_i)\,(\xi-x_0,\,\Delta x_j)}{\|\Delta x_i\|^2\,\|\Delta x_j\|^2}+\sum_{k=1}^{n}(p_k-p_0)\,\frac{(\xi-x_0,\,\Delta x_k)}{\|\Delta x_k\|^2}+p_0\,. \tag{1.6}$$

Замечание 2. В работе [2] также показано, что для любого $\xi\in\operatorname{conv}\{x_1,\ldots,x_n\}$ (то есть для любой точки грани, которую мы называем «гипотенузой» симплекса $\langle x_0,x_1,\ldots,x_n\rangle$) значение функции (1.6) не зависит от x_0 и от p_0. Другими словами, значения двух полиномов вида (1.6), построенных по симплексам $\langle x_0,x_1,\ldots,x_n\rangle$ и $\langle x_0',x_1',\ldots,x_n'\rangle$ таким, что $x_1=x_1',\ldots,$ $x_n=x_n'$, совпадают в каждой точке

$$\xi\in\operatorname{conv}\{x_1,\ldots,x_n\}=\operatorname{conv}\{x_1',\ldots,x_n'\}$$

(на их общей гипотенузе). Показано также, что для любого $r=1,\ldots,n$ и для любой точки ξ, принадлежащей грани $\operatorname{conv}\{x_0,\ldots,x_{r-1},x_{r+1}\ldots,x_n\}$ (называем ее «катетом»), значение функции (1.6) не зависит от значений x_r, p_r и всех q_{rk}. Это означает, что значения двух полиномов вида (1.6), построенных по симплексам $\langle x_0,x_1,\ldots,x_n\rangle$ и $\langle x_0',x_1',\ldots,x_n'\rangle$ таким, что $x_k=x_k'$ при всех $k=0,\ldots,r-1,r+1,\ldots,n$, совпадают в каждой точке их общей грани

$$\xi\in\operatorname{conv}\{x_0,\ldots,x_{r-1},x_{r+1}\ldots,x_n\}=\operatorname{conv}\{x_0',\ldots,x_{r-1}',x_{r+1}'\ldots,x_n'\}$$

(на их общем катете). Данное обстоятельство означает, что имеется возможность осуществлять непрерывную (вообще говоря, негладкую) стыковку полиномов вида (1.6), заданных на смежных симплексах, что, в свою очередь, позволяет аппроксимировать функции нескольких переменных сплайнами, построенными в соответствии с формулами (1.6).

Зафиксируем непрерывно дифференцируемую функцию $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, где множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ допускает триангуляцию симплексами $\langle x_0, x_1, \dots, x_n\rangle \in \Omega_*^{n+1}$. Триангуляция порождает дискретное векторное поле, состоящее из векторов $F(x_0, x_1, \dots, x_n)$, и в соответствии с (1.4) каждый из этих векторов приближенно равен градиенту функции f, вычисленному в некоторой точке x, «достаточно близкой» к соответствующему симплексу из триангуляции. (Легко, однако, привести пример, когда нет таких $x \in \mathbb{R}^n$, что $F(x_0, x_1, \dots, x_n) = \operatorname{grad} f(x)$). Тем не менее для достаточно измельченной триангуляции мы можем считать, что вектор $F(x_0, x_1, \dots, x_n)$ — это некоторое усредненное значение поля градиента функции f на элементе $\langle x_0, x_1, \dots, x_n\rangle$.

В связи с такой интерпретацией возникает вопрос о выборе наиболее естественной точки приложения вектора $F(x_0, x_1, \dots, x_n)$ к симплексу $\langle x_0, x_1, \dots, x_n\rangle$ (например, с позиций физической науки такой точкой является центр масс вершин симплекса). В теореме 3 в качестве точки приложения вектора $F(x_0, x_1, \dots, x_n)$ выступает вершина x_0, причем в силу замечания 2 полиномы вида (1.6), порожденные элементами триангуляции, допускают непрерывную стыковку, то есть порождают квадратичный сплайн, аппроксимирующий функцию f.

В настоящей работе в условиях теоремы 3 изменено условие (1.5): в качестве точки приложения вектора $F(x_0, x_1, \dots, x_n)$ выступает произвольная точка $x \in \operatorname{conv}\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$; исследуются вопросы существования, единственности и представления интерполяционных полиномов; показано, что только при $x = x_0$ имеет место непрерывная стыковка полиномов, построенных на элементах триангуляции.

§ 2. Квадратичные интерполяционные многочлены нескольких переменных

Пусть задан симплекс $\langle x_0, x_1, \dots, x_n\rangle$, числа $p_0, p_1, \dots, p_n$ и числа q_{ij}, $i, j = 1, \dots, n$, такие, что $q_{ij} = q_{ji}$, $q_{ii} = p_i$. Будем искать коэффициенты A_{rs}, b_k, c полинома второй степени (здесь и далее пишем $\sum\limits_{r,s}$ и $\sum\limits_{k}$, полагая, что индексы суммирования меняются от 1 до n)

$$f(\xi) = f(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{r,s} A_{rs}\,(\xi_r - x_{0r})\,(\xi_s - x_{0s}) + \sum_k b_k\,(\xi_k - x_{0k}) + c\,, \tag{2.1}$$

исходя из условий: $A_{rs} = A_{sr}$ для всех $r, s = 1, \dots, n$ и

$$\begin{cases} f(x_i) = p_i, \qquad i = 0, 1, \dots, n, \\ f(\tfrac{1}{2}\,x_i + \tfrac{1}{2}\,x_j) = q_{ij}, \qquad i, j = 1, \dots, n, \\ \operatorname{grad} f(x\,) = F(x_0, x_1, \dots, x_n), \end{cases} \tag{2.2}$$

где $x \doteq \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k x_k$ — это некоторая точка симплекса $\langle x_0, x_1, \dots, x_n\rangle$, то есть выполнены условия $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k = 1$ и все $\lambda_k \geqslant 0$. Очевидно, $x = x_0 + \sum\limits_k \lambda_k \Delta x_k$. (Заметим, что нет никаких ограничений для того, чтобы считать, что x — это произвольная точка из $\mathbb{R}^n$, а $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ — ее барицентрические координаты относительно вершин симплекса $\langle x_0, x_1, \dots, x_n\rangle$.)

Функция F в третьем условии (2.2) определяется формулой (1.1). Заметим еще, что первая совокупность условий (при $i \neq 0$) входит во вторую совокупность (при $j = i$) и записана лишь для удобства. Если $A \doteq \bigl(A_{rs}\bigr)$ — матрица, а $b \doteq \operatorname{col}\,(b_1, \dots, b_n)$ — вектор неизвестных, то для функции (2.1) справедливо представление $f(\eta + x_0) = (A\,\eta, \eta) + (b, \eta) + c$. Равенства $p_0 = f(x_0) = c$ очевидны, поэтому система условий (2.2) принимает вид

$$\begin{cases} (A\,\Delta x_i, \Delta x_i) + (b, \Delta x_i) = \Delta p_i, \qquad i = 1, \dots, n, \\ \frac{1}{4}\,(A\,\Delta x_i, \Delta x_i) + \frac{1}{4}\,(A\,\Delta x_i, \Delta x_j) + \frac{1}{4}\,(A\,\Delta x_j, \Delta x_i) + \frac{1}{4}\,(A\,\Delta x_j, \Delta x_j) + \\ \qquad + \frac{1}{2}\,(b, \Delta x_i) + \frac{1}{2}\,(b, \Delta x_j) + p_0 = q_{ij}, \qquad i, j = 1, \dots, n, \\ \operatorname{grad} f(x) = (\Delta x)^{-1} \Delta p\,, \end{cases}$$

где $\Delta p_i \doteq p_i - p_0$ и $\Delta p \doteq \mathrm{col}\,(\Delta p_1, \ldots, \Delta p_n)$. Поскольку $\mathrm{grad}\, f(\eta + x_0) = 2A\,\eta + b$, то имеет место равенство $\mathrm{grad}\, f(x) = 2A\,(x - x_0) + b = 2\sum_k \lambda_k A\,\Delta x_k + b$, поэтому система принимает вид

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_{ii} + \beta_i = \Delta p_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \\ \alpha_{ii} + 2\alpha_{ij} + \alpha_{jj} + 2\beta_i + 2\beta_j = 4\,(q_{ij} - p_0), \qquad i, j = 1, \ldots, n, \\ 2\sum_k \lambda_k A\,\Delta x_k + b = (\Delta x)^{-1}\Delta p\,, \end{array}\right. \tag{2.3}$$

где использованы обозначения $\alpha_{ij} \doteq (A\,\Delta x_i, \Delta x_j)$ и $\beta_k \doteq (b, \Delta x_k)$. Здесь мы воспользовались очевидным равенством $\alpha_{ji} = \alpha_{ij}$. Уместно также отметить следующие свойства чисел α_{ij} и β_k. Если $\beta \doteq \mathrm{col}\,(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, то, очевидно, $\beta = \Delta x\, b$. Если через α обозначить матрицу $\big(\alpha_{ij}\big)$, то для ее элементов справедливы равенства $\alpha_{ij} = \sum_{r,s} A_{rs}\Delta x_{ir}\Delta x_{js} = \sum_{r,s} \Delta x_{ir} A_{rs} \Delta x^{\top}_{sj}$, поэтому $\alpha = \Delta x\, A\,\Delta x^{\top}$. Поскольку $\alpha_{ik} = \sum_{r,s} \Delta x_{ir} A_{rs} \Delta x_{ks}$, то число α_{ik} является i-ой компонентой вектора $\Delta x\, A\,\Delta x_k$.

Из первых двух групп уравнений (2.3) имеем $2\alpha_{ij} = B_{ij} - \beta_i - \beta_j$, где $B_{ij} \doteq 2Q_{ij} + \Delta p_i + \Delta p_j$, а $Q_{ij} \doteq 2q_{ij} - p_i - p_j$. В силу последнего равенства системы (2.3) справедливо

$$\beta = \Delta x\, b = \Delta p - 2\sum_k \lambda_k\, \Delta x\, A\,\Delta x_k,$$

$$\beta_i = \Delta p_i - 2\sum_k \alpha_{ik}\lambda_k = \Delta p_i - \sum_k B_{ik}\lambda_k + \beta_i\,(1 - \lambda_0) + \sum_k \beta_k \lambda_k, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Таким образом, если $w_i \doteq \Delta p_i - \sum_k B_{ik}\lambda_k$ и $w \doteq \mathrm{col}\,(w_1, \ldots, w_n)$, то имеет место уравнение $[\,\lambda_0 E - \Lambda\,]\,\beta = w$, где через Λ обозначена матрица $\big(\Lambda_{rs}\big)$ с элементами $\Lambda_{rs} \doteq \lambda_s$. Легко проверить справедливость равенств

$$\Lambda^2 = (1 - \lambda_0)\,\Lambda \qquad \text{и} \qquad [\,\lambda_0 E - \Lambda\,]\,[\,(2\lambda_0 - 1)E + \Lambda\,] = \lambda_0\,(2\lambda_0 - 1)E\,,$$

поэтому уравнение $[\,\lambda_0 E - \Lambda\,]\,\beta = w$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\lambda_0 \neq 0$ и $\lambda_0 \neq \frac{1}{2}$. Исходная задача исключает из рассмотрения вырожденные случаи, в которых она либо вовсе неразрешима, либо имеет бесконечно много решений (оба случая некорректны с позиций прикладной науки), поэтому в дальнейшем считаем, что точка x в системе (2.2) такова, что $\lambda_0 \neq 0$ и $\lambda_0 \neq \frac{1}{2}$.

При выполнении последнего условия система (2.2) имеет единственное решение. Действительно, так как $\beta = \gamma\,[\,(2\lambda_0 - 1)E + \Lambda\,]\,w$, где $\gamma \doteq \frac{1}{\lambda_0\,(2\lambda_0 - 1)}$, то это позволяет найти все коэффициенты b_k (поскольку $b = (\Delta x)^{-1}\beta$), а так как $\alpha_{ij} = \frac{1}{2}\,(B_{ij} - \beta_i - \beta_j)$ и $A = (\Delta x)^{-1}\alpha\,(\Delta x^{\top})^{-1}$, то величины A_{rs} также легко вычислимы. Таким образом, доказана

Теорема 4. *Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задан симплекс $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle$ и зафиксированы числа $p_0, p_1, \ldots, p_n$ и q_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, такие, что $q_{ij} = q_{ji}$, $q_{ii} = p_i$. Пусть далее $x \doteq \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x_k$ — это некоторая точка симплекса $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle$ такая, что $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k = 1$, $\lambda_k \geqslant 0$, $\lambda_0 \neq 0$ и $\lambda_0 \neq \frac{1}{2}$. Существует ровно один полином вида* (2.1), *который удовлетворяет всем условиям* (2.2).

Для фиксированного $\xi \in \mathrm{conv}\,\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ существует единственный набор неотрицательных чисел $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ таких, что $\sum_{k=0}^{n} \mu_k = 1$ и $\xi = \sum_{k=0}^{n} \mu_k x_k = x_0 + \sum_k \mu_k \Delta x_k$. Следовательно, для функции (2.1) имеем

$$f(\xi) = \big(\,A\,(\xi - x_0), \xi - x_0\,\big) + (b, \xi - x_0) + c =$$

$$= \sum_{i,j} (A\,\Delta x_i, \Delta x_j)\,\mu_i\mu_j + \sum_k (b, \Delta x_k)\,\mu_k + c = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\,\mu_i\mu_j + \sum_k \beta_k\mu_k + p_0\,,$$

а так как $\alpha_{ij} = Q_{ij} + \frac{1}{2}\,(\Delta p_i + \Delta p_j - \beta_i - \beta_j)$, то

$$f(\xi) = \sum_{i,j} Q_{ij}\,\mu_i\mu_j + \tfrac{1}{2}\sum_{i,j} \Delta p_i\,\mu_i\mu_j + \tfrac{1}{2}\sum_{i,j} \Delta p_j\,\mu_i\mu_j - \tfrac{1}{2}\sum_{i,j} \beta_i\,\mu_i\mu_j - \tfrac{1}{2}\sum_{i,j} \beta_j\,\mu_i\mu_j + \sum_k \beta_k\mu_k + p_0 =$$

$$= \sum_{i,j} Q_{ij}\,\mu_i\mu_j + (1-\mu_0)\sum_k \Delta p_k\mu_k + \mu_0\sum_k \beta_k\mu_k + p_0\,. \tag{2.4}$$

Поскольку $\beta = \gamma\,[\,(2\lambda_0-1)E + \Lambda\,]\,w$, то имеет место равенство $\beta_k = \gamma\,[\,(2\lambda_0-1)w_k + \sum\limits_i \lambda_i w_i\,]$, а так как $B_{ij} = 2Q_{ij} + \Delta p_i + \Delta p_j$, то для чисел w_i справедлива цепочка равенств

$$w_i = \Delta p_i - \sum_j B_{ij}\lambda_j = \lambda_0\Delta p_i - 2\sum_j Q_{ij}\lambda_j - \sum_j \Delta p_j\lambda_j\,.$$

Таким образом, в результате несложных преобразований получаем, что

$$\beta_k = \Delta p_k - \frac{2}{\lambda_0}\sum_j Q_{kj}\lambda_j - \frac{2}{\lambda_0(2\lambda_0-1)}\sum_{i,j} Q_{ij}\lambda_i\lambda_j\,,$$

а в силу (2.4) для интерполяционного многочлена $f_x(\xi) \doteq f(\xi)$ справедливо представление

$$f_x(\xi) = \sum_{i,j} (2q_{ij}-p_i-p_j)\left(\mu_i\mu_j - \frac{2\mu_0}{\lambda_0}\mu_i\lambda_j + \frac{2\mu_0\,(\mu_0-1)}{\lambda_0(2\lambda_0-1)}\lambda_i\lambda_j\right) + \sum_{k=0}^{n} p_k\mu_k\,. \tag{2.5}$$

Нижний индекс x подчеркивает зависимость функции (2.1) от параметра x, входящего в условия (2.2) и зависящего, в свою очередь, от значений $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Здесь уместно также напомнить, что зависимость от ξ реализована через параметры $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$. Другими словами, точки x и ξ заданы в барицентрической системе координат.

Если точка ξ принадлежит гипотенузе $\mathrm{conv}\,\{x_1, \ldots, x_n\}$ симплекса $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle$, то $\mu_0 = 0$, поэтому $f_x(\xi) = \sum\limits_{i,j} (2q_{ij} - p_i - p_j)\,\mu_i\mu_j + \sum\limits_k p_k\mu_k$, то есть сужение функции (2.5) на гипотенузу не зависит от величины p_0 (оно не зависит и от x). Таким образом, если имеется два набора чисел p_k, q_{ij} и p'_k, q'_{ij}, которые удовлетворяют условиям теоремы 4 и $p_1 = p'_1, \ldots, p_n = p'_n$ и $q_{ij} = q'_{ij}$, то значения двух полиномов вида (2.5), построенных по симплексам $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle$ и $\langle x'_0, x'_1, \ldots, x'_n\rangle$ таким, что $x_1 = x'_1, \ldots, x_n = x'_n$, совпадают в каждой точке $\xi \in \mathrm{conv}\,\{x_1, \ldots, x_n\} = \mathrm{conv}\,\{x'_1, \ldots, x'_n\}$ (на их общей гипотенузе). Что касается случая наличия общего катета у двух симплексов, то здесь ситуация принципиально иная.

Если $\xi \in \mathrm{conv}\,\{x_0, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1} \ldots, x_n\}$ при некотором r, то $\mu_r = 0$. Пусть $s \neq r$. Функция (2.5) линейна по переменной q_{rs}, поэтому для того чтобы ее сужение на катет не зависело от этой переменной, необходимо и достаточно, чтобы коэффициент, стоящий перед q_{rs}, обращался бы в нуль, как только $\mu_r = 0$. Это означает, что параметры $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ должны быть такими, что при всех $\mu_0, \ldots, \mu_{r-1}, \mu_{r+1}, \ldots, \mu_n$ выполнено равенство

$$\frac{2\mu_0\,(\mu_0-1)}{\lambda_0(2\lambda_0-1)}\lambda_r\lambda_s - \frac{2\mu_0}{\lambda_0}\mu_s\lambda_r + \frac{2\mu_0\,(\mu_0-1)}{\lambda_0(2\lambda_0-1)}\lambda_s\lambda_r = 0$$

(первое слагаемое досталось из формулы (2.5) от коэффициента, стоящего перед q_{rs}, а второе и третье — от коэффициента, стоящего перед q_{sr}). Таким образом,

$$0 = \mu_0\,\lambda_r\,[\,2\,(\mu_0-1)\,\lambda_s - (2\lambda_0-1)\,\mu_s\,] =$$

$$= \mu_0\,\lambda_r\,[\,(\mu_0-1)\,(1-2\lambda_r) - 2\,(\mu_0-1)\,(1-\lambda_0-\lambda_r-\lambda_s) + (2\lambda_0-1)\,(1-\mu_0-\mu_r-\mu_s)\,] =$$
$$= \mu_0\,\lambda_r\left[\,(\mu_0-1)\,(1-2\lambda_r) - 2\,(\mu_0-1)\sum_{k\neq r,\,k\neq s}\lambda_k + (2\lambda_0-1)\sum_{k\neq r,\,k\neq s}\mu_k\,\right].$$

Индекс k в суммах меняется от 1 до n, причем при $n=2$ обе эти суммы обращаются в нуль. В этом случае при всех μ_0 должно выполняться равенство $\mu_0\,(\mu_0-1)\,\lambda_r\,(1-2\lambda_r) = 0$, что возможно лишь при $\lambda_r = 0$ или при $\lambda_r = \frac{1}{2}$. Эти условия справедливы для $r = 1, 2$, а из четырех возможных решений нас устраивает лишь $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (иначе $\lambda_0 = 0$ или $\lambda_0 = \frac{1}{2}$).

При $n > 2$ выражение, стоящее в квадратных скобках, при фиксированном $\mu_0 \neq 0$ является линейной функцией от переменных μ_k, где $k = 1,\ldots,n$ и $k \neq r$, $k \neq s$. Так как $\lambda_0 \neq \frac{1}{2}$, то эта функция не равна тождественной константе, поэтому необходимо, чтобы $\lambda_r = 0$.

Итак, для любых $n \geqslant 2$ и $r = 1,\ldots,n$ должны выполняться равенства $\lambda_r = 0$, поэтому $\lambda_0 = 1$, $x = x_0$, а формула (2.5) получает вид

$$f(\xi) = f_{x_0}(\xi) = \sum_{i,j}(2q_{ij}-p_i-p_j)\,\mu_i\mu_j + \sum_{k=0}^{n} p_k\mu_k\,. \tag{2.6}$$

Так как $(\xi-x_0, \Delta x_m) = \sum\limits_k \mu_k(\Delta x_k, \Delta x_m) = \sum\limits_k \mu_k\delta_{km}\|\Delta x_m\|^2 = \mu_m\|\Delta x_m\|^2$ (где δ_{km} — символ Кронекера), то формула (2.6) превращается в (1.6).

Поскольку $\mu_r = 0$ при $\xi \in \operatorname{conv}\{x_0,\ldots,x_{r-1},x_{r+1}\ldots,x_n\}$, то легко заметить, что сужение функции (2.6) на этот катет не зависит не только от параметров q_{rs}, но оно не зависит и от параметра p_r. Таким образом, потребовав, чтобы сужение функции (2.5) на произвольный катет $\operatorname{conv}\{x_0,\ldots,x_{r-1},x_{r+1}\ldots,x_n\}$ не зависело от переменных q_{rs}, $s \neq r$, получаем, что это возможно лишь в одном-единственном случае, когда $x = x_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демышев А. С., Родионов В. И. Об эквивалентном определении непрерывной дифференцируемости // Известия Института математики и информатики. УдГУ. Ижевск, 2006. — Вып. 2 (36). — С. 39–42.
2. Родионов В. И. К вопросу о сплайн-аппроксимации функций нескольких переменных // Вестник Удмуртского университета. Математика. — 2007. — № 1. — С. 121–126.

Поступила в редакцию 15.02.10

V. I. Rodionov
On family of interpolated polynomials of some variables

The one-parametrical family of quadratic interpolated polynomials of several variables is investigated. In a role of parameter the point of n-dimensional space acts. Questions of existence and uniqueness interpolated polynomials are investigated. For polynomials the obvious representation (in barycentric system of coordinates) is proved. It is shown that only for the unique parameter continuous docking of interpolated polynomials constructed on elements of a triangulation of a special type takes place. For interpolated polynomial appropriating the given parameter the obvious representation in the Cartesian system of coordinates is proved. Application of interpolation with the given parameter makes possible quadratic spline-approximation of functions of many variables (at the same time with approximation of a field of a gradient of this function).

Keywords: interpolation, approximation, multivariate spline, gradient, simplex, barycentric coordinate system.

Mathematical Subject Classifications: 41A15, 26B05

Родионов Виталий Иванович, к. ф.-м. н., декан факультета информационных технологий и вычислительной техники, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), e-mail: rodionov@uni.udm.ru