

УДК 532.5.032

© В. В. Пах

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ¹

На основе упрощенных уравнений Навье–Стокса в длинноволновом приближении построена нелинейная модель двухслойного течения вязкой жидкости со свободной границей, создаваемого начальным рельефом границ слоев. Используя метод малого параметра, исследуется эволюция течения на больших временах и определяется зависимость между движением поверхности и границы раздела жидкости. Полученные результаты применяются для расчета профиля границы кора–мантия под крупномасштабной кольцевой структурой на Луне.

Ключевые слова: стоксово течение, многослойное течение, длинноволновое приближение, нелинейная диффузия, кольцевые структуры.

Введение

Упрощенные уравнения вязкой жидкости в длинноволновом приближении (уравнения смазочного слоя), полученные в предположении малости толщины слоев по сравнению с их горизонтальным размером, широко используются для моделирования течений в тонких слоях и пленках [1]. В настоящее время достаточно полно исследованы однослойные течения [2, 3]. Изучение многослойных течений связано со значительными трудностями: задача сводится к системе квазилинейных уравнений относительно границ слоев, в которой учитывается взаимное влияние течений в слоях. Как показали результаты моделирования двухслойных течений, слоистая структура течения приводит к нетривиальной труднопредсказуемой эволюции на больших временах [4, 5]. Детальное исследование этой проблемы в нелинейной постановке еще не проводилось.

В работе [6] рассматривалось осесимметричное течение двухслойной жидкости, создаваемое поднимающимся жестким цилиндрическим блоком фундамента. Анализ возмущений в рамках линейной модели и численное решение полной нелинейной системы показали, что при наличии перепада плотностей между слоями эволюция течения на малых и больших временах имеет существенные различия.

В настоящей работе проведено исследование полной нелинейной системы для осесимметричного течения двухслойной вязкой жидкости. С помощью метода малого параметра исследуется эволюция течения на больших временах. В качестве приложения полученных результатов выполнен расчет глубинного профиля границы кора–мантия под крупномасштабной кольцевой структурой на Луне.

§ 1. Система уравнений и краевые условия

Рассмотрим вязкую жидкость, состоящую из двух слоев (обозначены индексами $i = 1, 2$), которые ограничены поверхностями раздела $z = Z_i$, $i = \overline{1, 3}$ и боковой границей $r = r_b$. Общая схема модели показана на рис. 1. Верхняя граница Z_1 является свободной, а нижняя Z_3 — неподвижна. Пусть течение создается осесимметричным начальным рельефом поверхности и границы раздела слоев.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Дальневосточного отделения РАН (грант 09-III-A-07-317).

Осесимметрическое течение описывается в цилиндрических координатах (r, φ, z) , где r , φ и z — это соответственно радиальная, азимутальная и вертикальная координаты. Пусть начало координат совпадает с пересечением оси симметрии и средним (невозмущенным) уровнем поверхности жидкости. Все переменные предполагаются независимыми от φ .

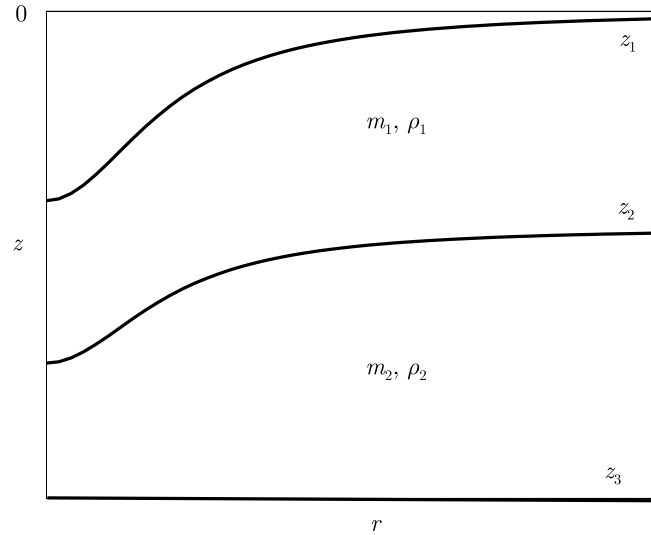


Рис. 1. Общая схема расчетной области

Движение вязкой несжимаемой жидкости в поле силы тяжести при условии осевой симметрии описывается следующими уравнениями [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu_i \left(\frac{1}{r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu_i \left(\frac{1}{r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) - \rho_i g, \\ \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где ρ_i , μ_i , $i = \overline{1, 2}$ — плотности и вязкости слоев (постоянные внутри слоев), u_r, u_z — радиальная и вертикальная компоненты скорости, p — давление, g — ускорение силы тяжести.

Для замыкания системы (1.1) на границах слоев задаются следующие краевые условия [1]

- (1) На границе Z_1 : условия свободной поверхности, то есть нормальная и касательная составляющие напряжения равны нулю:

$$\begin{aligned} \left(-p + 2\mu_1 \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) n_1^1 + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) n_2^1 &= 0, \\ \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) n_1^1 + \left(-p + 2\mu_1 \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) n_2^1 &= 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где n_j^i — направляющие косинусы нормали к границе Z_i , которые вычисляются по формулам

$$n_1^i = -\frac{\frac{\partial Z_i}{\partial r}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial Z_i}{\partial r} \right)^2}}, \quad n_2^i = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial Z_i}{\partial r} \right)^2}}. \quad (1.3)$$

- (2) На границе Z_2 : условия полного прилипания, то есть составляющие скорости и напряжения непрерывны:

$$\begin{aligned} [u_r]_-^+ &= 0, \quad [u_z]_-^+ = 0, \\ \left[\left(-p + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) n_1^2 + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) n_2^2 \right]_-^+ &= 0, \\ \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) n_1^2 + \left(-p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) n_2^2 \right]_-^+ &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $[\cdot]_-^+$ — скачок функции.

- (3) На границе Z_3 : составляющие скорости движения фундамента равны нулю:

$$u_r = 0, \quad u_z = 0. \quad (1.5)$$

- (4) Начальный профиль границ определяется функциями Z_{i0} :

$$Z_i(r, 0) = Z_{i0}(r), \quad i = \overline{1, 2}. \quad (1.6)$$

Кроме этого, на подвижных границах раздела задавались кинематические условия отсутствия перетока массы, то есть нормальная составляющая скорости частиц жидкости на границе равна скорости движения самой границы:

$$u_z(r, Z_i, t) - \frac{\partial Z_i}{\partial r} u_r(r, Z_i, t) - \frac{\partial Z_i}{\partial t} = 0, \quad i = \overline{1, 2}. \quad (1.7)$$

На боковой границе расчетной области, а также на оси симметрии радиальная скорость задавалась равной нулю:

$$u_r(0, z, t) = 0, \quad u_r(r_b, z, t) = 0. \quad (1.8)$$

Для описания движения жидкости использовались упрощенные уравнения в длинноволновом приближении, полученные из (1.1) при следующих предположениях:

- (1) характерный горизонтальный масштаб возмущений много больше вертикального;
- (2) негидростатические напряжения много меньше гидростатического давления;
- (3) плотность не убывает с глубиной.

Обозначим горизонтальный масштаб Z_{i0} через R , а вертикальный — через ϵR , где ϵ — малый параметр, и перейдем к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} r &= R r', \quad z = \epsilon R z', \quad \mu_i = \mu_0 \mu'_i, \quad \rho_i = \rho_0 \rho'_i, \\ u_r &= u_0 u'_r, \quad u_z = \epsilon u_0 u'_z, \quad p = p_0 p', \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $\mu_0, \rho_0, p_0 = \rho_1 g \epsilon R, u_0 = \frac{\epsilon^3 \rho_0 g R^2}{\mu_0}$ и t_0 — это масштабы вязкости, плотности, давления, скорости и времени соответственно. В масштабах вязкости и плотности выберем величины $\mu_0 = \mu_2$ и $\rho_0 = \rho_1$.

Подставляя (1.9) в (1.1)–(1.7) и пренебрегая величинами порядка $o(\epsilon)$, получим следующие уравнения (в дальнейшем для удобства штрихи опускаются):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \mu_i \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho_i, \\ \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

граничные условия:

$$p = 0, \quad \mu_1 \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0, \quad z = Z_1, \quad (1.11)$$

$$[u_r]_-^+ = 0, \quad [p]_-^+ = 0, \quad \left[\mu \frac{\partial u_r}{\partial z} \right]_-^+ = 0, \quad z = Z_2, \quad (1.12)$$

$$u_r = 0, \quad u_z = 0, \quad z = Z_3, \quad (1.13)$$

$$u_z(r, Z_i, t) - \frac{\partial Z_i}{\partial r} u_r(r, Z_i, t) - \frac{\partial Z_i}{\partial t} = 0, \quad i = \overline{1, 2} \quad (1.14)$$

и начальные условия:

$$Z_i(r, 0) = Z_{i0}, \quad i = \overline{1, 2}. \quad (1.15)$$

В качестве масштаба времени выберем величину $t_0 = \frac{R}{u_0 \gamma_2}$, где $\gamma_2 = \rho_2 - 1$ — безразмерная разность плотностей слоев.

Решая (1.10) с учетом условий (1.11)–(1.13), получим выражения для u_r , u_z и p на границах слоев. После подстановки их в (1.14) и некоторых преобразований получаются уравнения для Z_i :

$$\begin{aligned} \gamma_2 \frac{\partial Z_1}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(A_{11} \frac{\partial Z_1}{\partial r} + \gamma_2 A_{12} \frac{\partial Z_2}{\partial r} \right) \right), \\ \gamma_2 \frac{\partial Z_2}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(A_{21} \frac{\partial Z_1}{\partial r} + \gamma_2 A_{22} \frac{\partial Z_2}{\partial r} \right) \right), \end{aligned} \quad (1.16)$$

где

$$\begin{aligned} A_{ji} &= A_{ij} = \sum_{l=i}^2 h_l \sum_{m=j}^2 h_m \sum_{k=j}^2 \frac{1}{\mu_k} \frac{h_k}{1 + \delta_{jk} + \delta_{ij}}, \quad i \leq j, \quad i, j = \overline{1, 2}, \\ h_i &= Z_{i+1} - Z_i, \\ \delta_{ij} &\text{ символ Кронекера.} \end{aligned} \quad (1.17)$$

§ 2. Асимптотический анализ уравнений

Так как реальные значения плотностей в коре и мантии Земли и других твердых планет примерно равны $\rho_1 \sim 3000$ кг/м³ и $\rho_2 \sim 3300$ кг/м³, величина $\gamma_2 \sim 0.1$ является малым параметром.

Покажем, что если $\gamma_2 \neq 0$, то в эволюции течения можно выделить два различных режима: быстрая эволюция на малых временах, переходящая в медленно изменяющуюся (квазистационарную) фазу. Представим решение системы (1.16) в виде суммы:

$$Z_1 = z_1(r, t) + \zeta_1(r, \tau), \quad Z_2 = z_2(r, t) + \zeta_2(r, \tau), \quad (2.1)$$

где ζ_1 и ζ_2 являются пограничными функциями, компенсирующими невязку начальных условий и быстро убывающими к нулю на бесконечности, $\tau = \frac{t}{\gamma_2}$ — «быстрое» время [7].

Очевидно, что начальные условия для z_i и ζ_i из (2.1) должны удовлетворять следующим соотношениям: $Z_{i0} = \zeta_i(r, 0) + z_i(r, 0)$, $i = \overline{1, 2}$.

Далее разобьем систему (1.16) следующим образом

1. Для функций $z_i(r, t)$:

$$\begin{aligned} \gamma_2 \frac{\partial z_1}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(A_{11}(z_1, z_2) \frac{\partial z_1}{\partial r} + \gamma_2 A_{12}(z_1, z_2) \frac{\partial z_2}{\partial r} \right) \right), \\ \gamma_2 \frac{\partial z_2}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(A_{21}(z_1, z_2) \frac{\partial z_1}{\partial r} + \gamma_2 A_{22}(z_1, z_2) \frac{\partial z_2}{\partial r} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

2. Для функций $\zeta_i(r, t)$:

$$\begin{aligned} \gamma_2 \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(A_{11}(Z_1, Z_2) \frac{\partial Z_1}{\partial r} + \gamma_2 A_{12}(Z_1, Z_2) \frac{\partial Z_2}{\partial r} \right) - \right. \\ &\quad \left. r \left(A_{11}(z_1, z_2) \frac{\partial z_1}{\partial r} + \gamma_2 A_{12}(z_1, z_2) \frac{\partial z_2}{\partial r} \right) \right), \\ \gamma_2 \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(A_{21}(Z_1, Z_2) \frac{\partial Z_1}{\partial r} + \gamma_2 A_{22}(Z_1, Z_2) \frac{\partial Z_2}{\partial r} \right) - \right. \\ &\quad \left. r \left(A_{21}(z_1, z_2) \frac{\partial z_1}{\partial r} + \gamma_2 A_{22}(z_1, z_2) \frac{\partial z_2}{\partial r} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Представим приближенное решение в виде асимптотических разложений

$$\begin{aligned} z_1 &= z_{10} + \gamma_2 z_{11} + \dots, & z_2 &= z_{20} + \gamma_2 z_{21} + \dots, \\ \zeta_1 &= \zeta_{10} + \gamma_2 \zeta_{11} + \dots, & \zeta_2 &= \zeta_{20} + \gamma_2 \zeta_{21} + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Система нулевого приближения для z_{10} имеет вид

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r A_{11}(z_{10}, z_{20}) \frac{\partial z_{10}}{\partial r} \right), \\ 0 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r A_{21}(z_{10}, z_{20}) \frac{\partial z_{10}}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Так как боковые границы расчетной области непроницаемы, эта система имеет нулевое решение $z_{10} = 0$. Подставляя его в (2.3), получим систему нулевого приближения для ζ_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_{10}}{\partial \tau} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r A_{11}(\zeta_{10}, \zeta_{20}) \frac{\partial \zeta_{10}}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial \zeta_{20}}{\partial \tau} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r A_{21}(\zeta_{10}, \zeta_{20}) \frac{\partial \zeta_{10}}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Так как система (2.3) автономна (то есть коэффициенты уравнений не зависят явно от t) величины погранслойных функций на больших временах ($t \sim 1$) можно оценить следующим образом. Представим ζ_{i0} в виде суммы

$$\zeta_{i0} = \bar{\zeta}_{i0} + h_i, \quad h_i \ll 1, \quad i = \overline{1, 2}, \quad (2.7)$$

где $\bar{\zeta}_{i0}$ усредненное значение ζ_{i0} . Подставим (2.7) в (2.6) и линеаризуем полученную систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial \tau} &= A_{11}(\bar{\zeta}_{10}, \bar{\zeta}_{20}) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial h_1}{\partial r}, \\ \frac{\partial h_2}{\partial \tau} &= A_{21}(\bar{\zeta}_{10}, \bar{\zeta}_{20}) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial h_1}{\partial r}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

откуда получим $h_2 = \frac{A_{21}(\bar{\zeta}_{10}, \bar{\zeta}_{20})}{A_{11}(\bar{\zeta}_{10}, \bar{\zeta}_{20})} h_1$.

Согласно [8, 9], $|\zeta_i| \sim \exp(-\frac{\omega_1 t}{\gamma_2})$, где $\omega_1 \sim \min A_{11}(\bar{\zeta}_{10}, \bar{\zeta}_{20})$. Следовательно, на больших временах $t \sim 1$ вклад погранслойных функций в общее решение пренебрежимо мал.

Система уравнений для z_{11} и z_{20} в первом приближении имеет вид

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(A_{11}(0, z_{20}) \frac{\partial z_{11}}{\partial r} + A_{12}(0, z_{20}) \frac{\partial z_{20}}{\partial r} \right) \right), \\ \frac{\partial z_{20}}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(A_{21}(0, z_{20}) \frac{\partial z_{11}}{\partial r} + A_{22}(0, z_{20}) \frac{\partial z_{20}}{\partial r} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Интегрируем первое уравнение (2.9) по r

$$A_{11}(0, z_{20}) \frac{\partial z_{11}}{\partial r} + A_{12}(0, z_{20}) \frac{\partial z_{20}}{\partial r} = C_1. \quad (2.10)$$

Константа интегрирования $C_1 = 0$, так как из (1.8) на оси симметрии $r = 0$ частные производные $\frac{\partial z_{11}}{\partial r}$ и $\frac{\partial z_{20}}{\partial r}$ равны нулю.

Решая (2.3), получим

$$z_{11} = - \int_0^{z_{20}} \frac{A_{12}(0, y)}{A_{11}(0, y)} dy + C_2. \quad (2.11)$$

Свободная константа C_2 определяется из следующего условия: если $z_{11} = 0$, то $z_{20} = -H$, где H — средняя толщина верхнего слоя. Тогда

$$z_{11} = G(z_{20}, H) = - \int_{-H}^{z_{20}} \frac{A_{12}(0, y)}{A_{11}(0, y)} dy. \quad (2.12)$$

Подставляя полученное решение (2.12) во второе уравнение (2.9), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_{20}}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r A(0, z_{20}) \frac{\partial z_{20}}{\partial r} \right), \\ \text{где } A(z_{20}) &= A_{21}(0, z_{20}) \frac{\partial G}{\partial z_{20}} + A_{22}(0, z_{20}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Скорость убывания функций z_{11} и z_{02} по сравнению с погранслойными функциями ζ_i будет значительно меньше и оценивается величиной $\exp(-\omega_2 t)$, где $\omega_2 \sim \min A(0, z_{20})$ [8, 9].

Подставляя значения коэффициентов A_{ij} из (1.17) в (2.12), получим

$$\begin{aligned} \frac{A_{12}(0, y)}{A_{11}(0, y)} &= -2 \frac{y^2 + y Z_3 + Z_3^2}{(y - Z_3)(y + 2 Z_3)} + O\left(\frac{1}{\mu_1}\right), \\ A(0, z_{20}) &= \frac{1}{4} \frac{(z_{20}^2)(z_{20} - Z_3)^3}{(z_{20} - Z_3)^2 - 3(z_{20} - Z_3)z_{20} + 3z_{20}^2} + O\left(\frac{1}{\mu_1}\right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Так как $\mu_1 \gg 1$, вторым слагаемым в (2.14) можно пренебречь. Подставляя (2.14) в (2.12), после некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} z_{11} &= \frac{z_{20} + H}{2} + \sqrt{3} Z_3 \left(\arctan \frac{Z_3 - 2H}{\sqrt{3} Z_3} - \arctan \frac{Z_3 + 2z_{20}}{\sqrt{3} Z_3} \right), \\ \frac{\partial z_{20}}{\partial t} &= \frac{1}{4r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{(z_{20}^2)(z_{20} - Z_3)^3}{(z_{20} - Z_3)^2 - 3(z_{20} - Z_3)z_{20} + 3z_{20}^2} \frac{\partial z_{20}}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Таким образом, на больших временах эволюции границ зависимость между z_1 и z_2 получается почти функциональной: зная положение границы z_2 , в любой точке можно определить положение поверхности z_1 . Краевые условия оказывают слабое влияние на эту зависимость. Для геофизических приложений более интересна обратная зависимость $z_1 \rightarrow z_2$. В этом случае необходимо находить неявную функцию из (2.15) приближенными методами или численно решать обыкновенное дифференциальное уравнение (2.13).

Для проверки правильности полученного асимптотического приближения система уравнений (1.16) была решена численно с использованием полностью неявной разностной схемы, абсолютно устойчивой по времени, подробное описание которой приводится в [6].

При расчетах были использованы следующие значения параметров слоев:

– малый параметр $\epsilon \simeq 0.1$;

- средние уровни границ слоев: $\bar{Z}_1 = 0, \quad \bar{Z}_2 = -0.5, \quad \bar{Z}_3 = -1;$
- плотности слоев: $\rho_1 = 3, \quad \rho_2 = 3.4;$
- вязкости слоев: $\mu_1 = 300, \quad \mu_2 = 30.$

Тогда масштаб скорости будет примерно равен $u_0 \simeq 10^{-3}$, число Рейнольдса — $Re \simeq 10^{-2}$ и масштаб времени — $t_0 \simeq 10^3$.

Начальные профили поверхности и границы раздела слоев приводятся на рис. 2.

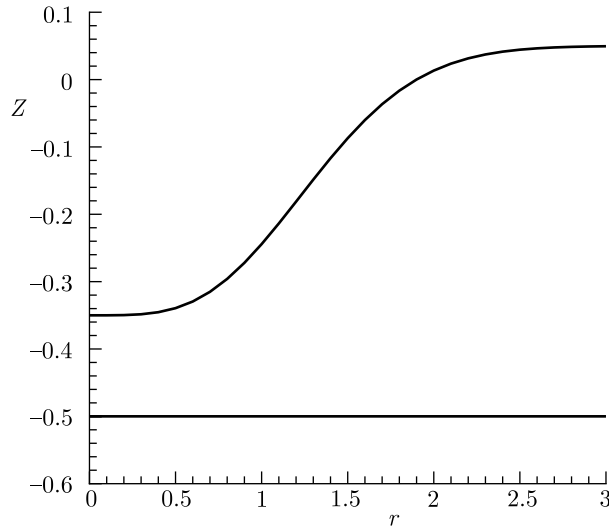


Рис. 2. Профили границ z_1 и z_2 в начальный момент времени

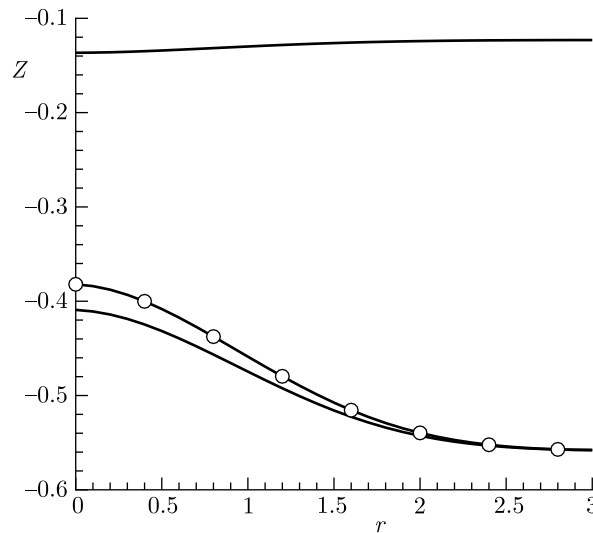


Рис. 3. Положение границ z_1 и z_2 в момент времени $t = 0.3$

Профили поверхности и границы раздела слоев на квазистационарной стадии показаны на рис.3. Сплошной линией с маркерами показан профиль средней границы, полученный с использованием асимптотического приближения (2.15). При сравнении решений следует также учитывать погрешность численного решения полной нелинейной системы. Таким образом, асимптотическое приближение (2.15) при известном профиле поверхности позволяет получить достаточно хорошее приближение профиля границы раздела слоев.

§ 3. Геофизические приложения

В качестве приложения был выполнен расчет профиля границы раздела кора–мантия кольцевой структуры Orientale на Луне (рис. 4). Согласно данным наблюдений, эта кольцевая структура образовалась из первоначального кратера, форму и время образования которого можно оценить лишь приблизительно. На рис. 5 приводится один из вариантов начальной формы кратера, реконструированный на основе данных гравиметрических наблюдений из работы [10]. Очевидно, что для непосредственного наблюдения доступна лишь топография поверхности, а профиль границы кора–мантия на глубине порядка 50–60 км может быть получен только с помощью геофизических методов. На рис. 6 показаны профили границы кора–мантия, полученные путем интерпретации гравиметрических данных [12]: методом аппроксимации границы многогранниками (пунктирная линия с квадратными маркерами), с помощью сферических функций (пунктирная линия с треугольными маркерами). Разница результатов, полученных методами аппроксимации границы многогранниками и сферических функций объясняется тем, что обратная задача гравиметрии является некорректной, то есть нельзя однозначно определить профиль границы кора–мантия по аномалии гравитационного поля на поверхности. На результат также сильно влияет выбор нулевого приближения профиля границы. Наиболее достоверной является только длинноволновая часть полученных результатов [12], одной из основных характеристик которой является величина общего перепада глубин. Неопределенность начальных и граничных условий представляют собой одну из основных трудностей для моделирования процессов в недрах Земли и планет.

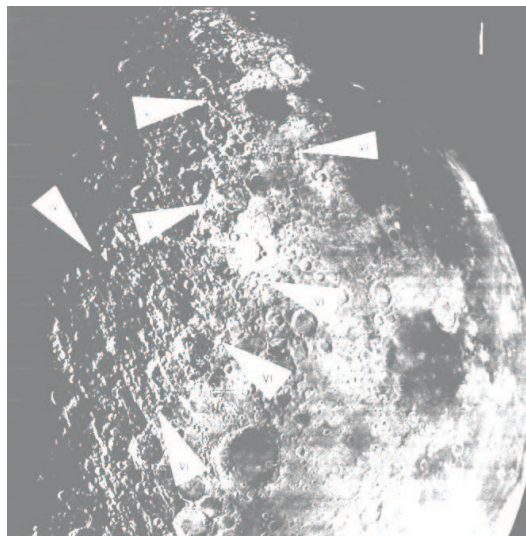


Рис. 4. Фотография кольцевой структура Orientale на Луне, приведенная в [11]

Был выполнен расчет положения границы кора–мантия с использованием следующих данных. Согласно данным наблюдения Луны [13], средняя толщина лунной коры является величиной порядка ~ 50 км, а радиус кольцевой структуры Orientale ~ 900 км. Нижняя граница Z_3 задавалась на глубине 100 км. Ускорение силы тяжести на Луне равно $1.62 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$, вязкость мантии $\sim 10^{22} \text{ Па} \cdot \text{с}$. Плотности слоев $\rho_1 = 2800 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ и $\rho_2 = 3350 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ взяты из [12]. В этом случае масштаб времени получается $\sim 0.4 \cdot 10^9$ лет, что по порядку соответствует возрасту рассматриваемой кольцевой структуры [11].

На рис. 6 сплошной линией с маркерами показан профиль границы, полученный с помощью асимптотического приближения (2.15). Как видно из приведенных результатов, эта функция достаточно хорошо приближает длинноволновую часть границы. Таким образом, полученное асимптотическое приближение может оказаться полезным в геофизических исследованиях, например, в качестве нулевого приближения при использовании гравиметрических методов.

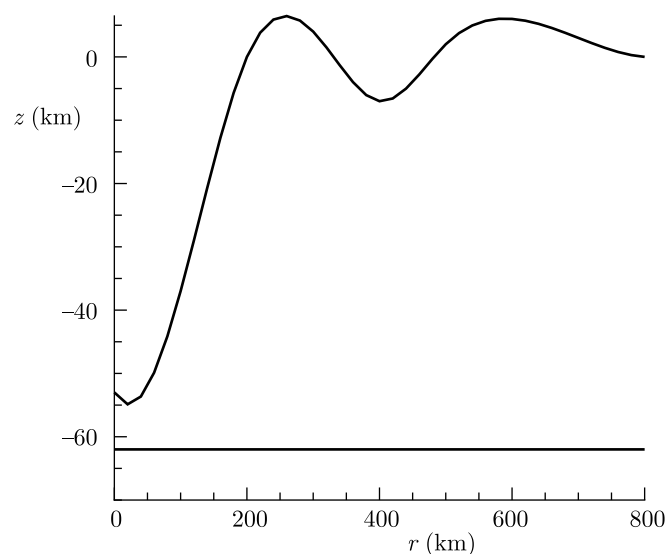


Рис. 5. Рельеф поверхности и профиль границы кора–мантия в начальный момент времени из работы [10]

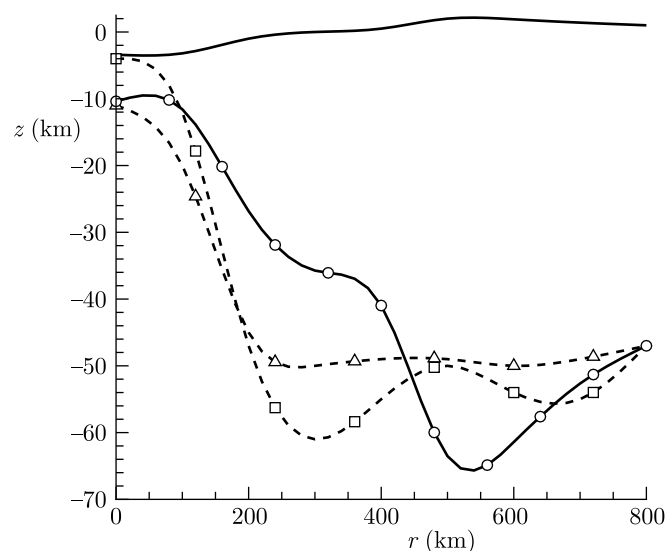


Рис. 6. Рельеф поверхности кольцевой структуры в настоящее время и профили границы кора–мантия, полученные гравиметрическими методами [12] и с помощью асимптотического приближения

Заключение

Проведено исследование системы нелинейных параболических уравнений, описывающих эволюцию осесимметричного медленного течения двухслойной вязкой жидкости со свободной границей, создаваемого начальным рельефом границ слоев.

С помощью метода малого параметра показано, что, аналогично линейной модели из работы [6], существенное различие эволюции течения на малых и больших временах возможно лишь при наличии перепада плотностей между слоями. Из результатов асимптотического анализа следует, что движения поверхности и границы раздела слоев жидкости связаны зависимостью, близкой к функциональной. Решена тестовая задача, которая показала достаточно хорошую точность полученного асимптотического приближения.

В качестве примера возможных приложений полученных результатов выполнен расчет глубинной структуры крупномасштабной кольцевой структуры на Луне. Модельные расчеты показали хорошее соответствие с данными геофизических наблюдений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Гостехтеориздат, 1955. — 519 с.
2. Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. Волновое течение пленок. — Новосибирск: ВО Наука, 1992. — 256 с.
3. Eley R. R., Schwartz L. W. Interaction of rheology, geometry, and process in coating flow // *J. Coat. Tech.* — 2002. — Vol. 74. — № 932. — P. 43–53.
4. Михайлов В. О. Математическая модель процесса эволюции структур, образующихся в результате вертикальных движений // *Изв. АН СССР. Физика Земли.* — 1983. — № 6. — С. 3–18.
5. Merkt D., Pototsky A., Bestehorn M. Long-wave theory of bounded two-layer films with a free liquid-liquid interface: Short- and long-time evolution // *Phys. Fluids.* — 2005. — Vol. 17. — 064104.
6. Пак В. В. Осесимметрическая модель кольцевой структуры в двухслойном течении вязкой жидкости со свободной поверхностью // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные Науки.* — 2009. — Вып. 2. — С. 63–74.
7. Найфэ А. Х. Методы возмущений. — М.: Мир, 1976. — 456 с.
8. Белоносов В. С., Вишневецкий М. П. Об устойчивости стационарных решений нелинейных параболических систем // *Матем. сб.* — 1977. — Т. 104 (146). — № 4 (12). — С. 534–558.
9. Борисов В. Г. О параболических краевых задачах с малым параметром при производных по t // *Матем. сб.* — 1986. — Т. 131 (173). — № 3 (11). — С. 293–308.
10. Wieczorek M. A., Phillips R. J. Lunar Multiring Basins and the Cratering Process // *Icarus.* — 1999. — Vol. 139. — P. 246–259.
11. Pike R. J., Spudis P. D. Basin-ring spacing on the Moon, Mercury, and Mars // *Earth, Moon, and Planets.* — 1987. — Vol. 39 (1987). — P. 129–194.
12. Hikida H., Wieczorek M. A. Crustal thickness of the Moon: New constraints from gravity inversions using polyhedral shape models // *Icarus.* — 2007. — Vol. 192. — P. 150–166.
13. Теркот Д., Шуберт Дж. Геодинамика. Геологическое приложение физики сплошных сред. Т. 2. — М.: Мир, 1985. — 360 с.

Поступила в редакцию 16.04.10

V. V. Pak

The nonlinear model of axisymmetric free-surface two-layered creeping flow

The nonlinear model based on the long-wave approximation of the Navier–Stokes equations is developed to investigate the evolution of free-surface two-layered creeping flow subjected by the initial topography of the surface and interface between layers. Using the method of asymptotic expansions for the governing equations, we study a long-time evolution of the flow and reveal the relation between the surface and interface displacements. The obtained results are applied to calculate the profile of the crust-mantle interface beneath the large-scale lunar basin.

Keywords: Stokes flow, multi-layered flow, long-wave approximation, nonlinear diffusion, ring structures.

Mathematical Subject Classifications: 76D50

Пак Владимир Васильевич, к. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник лаборатории геофизической гидродинамики, Тихоокеанский океанологический институт ДВО РАН им. В. И. Ильичева, 690041, Россия, г. Владивосток, ул. Балтийская, 43, e-mail: pakvv@poi.dvo.ru