УДК 531.38

© *И. С. Мамаев*

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС ПРОГРАММ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ

В работе исследуются различные механические системы с неголономными связями. В частности, рассмотрены вопросы существования тензорных инвариантов (законов сохранения) и их связь с поведением системы. Особое внимание уделено возможности представления уравнений движения в конформно-гамильтоновой форме, которая в данной работе используется, главным образом, для интегрирования систем.

Ключевые слова: неголономные системы, реализация связей, законы сохранения, иерархия динамика, явное интегрирование.

§ 1. Уравнения движения неголономных систем

Неголономные связи и уравнения Феррерса. Пусть $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ — обобщенные координаты на конфигурационном пространстве системы $\mathcal{M}$ (пространстве положений и т. п.). Уравнения (неголономных) связей в общем случае имеют вид

$$f_\mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0, \quad \mu = 1, \dots, m < n. \tag{1.1}$$

Грубо говоря, основное отличие неголономных связей от голономных заключается в том, что они не могут быть представлены в конечном (интегральном) виде

$$F_\mu(\mathbf{q}, t) = 0, \quad \mu = 1, \dots, \bar{m} < n.$$

Критерий, позволяющий проверять неголономность связей , может быть получен при помощи теоремы Фробениуса. Более подробнее обсуждение этого вопроса применительно к конкретному примеру неголономной системы будет приведено ниже.

Рассматриваемые в неголономной механике связи, как правило, являются линейными по обобщенным скоростям и не зависят явно от времени

$$f_\mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_k a_{\mu k}(\mathbf{q})\dot{q}_k + b_\mu(\mathbf{q}) = 0. \tag{1.2}$$

Именно такие связи реализуются в содержательных задачах. Тем не менее, Аппелем и Гамелем был указан несколько искусственный пример нелинейной неголономной связи. Всюду в дальнейшем в работе мы будем рассматривать только связи вида (1.2).

Исторически первой общей формой уравнений неголономной механики следует считать уравнения Феррерса[1] с неопределенными множителями (1872 г.) [24]

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{T}{\dot{\mathbf{q}}}\Big) - \frac{T}{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \sum_\mu \lambda_\mu \frac{f_\mu}{\dot{\mathbf{q}}}, \tag{1.3}$$

где $\frac{T}{\mathbf{q}} = \Big(\frac{T}{q_1}, \dots, \frac{T}{q_n}\Big)$, $\frac{T}{\dot{\mathbf{q}}} = \Big(\frac{T}{\dot{q}_1}, \dots, \frac{T}{\dot{q}_n}\Big)$. В уравнениях (1.3) T — кинетическая энергия, $\mathbf{Q}$ — обобщенная сила, а λ_μ являются неопределенными множителями, которые однозначно восстанавливаются из условий связей (1.2).

[1] Феррерс при выводе уравнений ограничился рассмотрением декартовых координат.

Так, если кинетическая энергия — однородная квадратичная форма обобщенных скоростей

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}), \tag{1.4}$$

где $\mathbf{A}(\dot{\mathbf{q}})$ — симметричная матрица, то неопределенные множители удовлетворяют системе линейных уравнений вида

$$\sum_{\nu}\left(\frac{f_\mu}{\dot{\mathbf{q}}}, \mathbf{A}^{-1}\frac{f_\nu}{\dot{\mathbf{q}}}\right)\lambda_\nu = \left(\mathbf{A}^{-1}\frac{f_\mu}{\dot{\mathbf{q}}}, \dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{q}} - \frac{T}{\mathbf{q}} - \mathbf{Q}\right) - \left(\dot{\mathbf{q}}, \frac{f_\mu}{\mathbf{q}}\right), \quad \mu = 1 \ldots m. \tag{1.5}$$

Здесь и далее $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение векторов.

Решая эту систему получим неопределенные множители как функции обобщенных координат и скоростей: $\lambda_\mu = \lambda_\mu(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$. После подстановки этих множителей в уравнения (1.3) получим замкнутую систему, при этом уравнения (1.2) определяют инвариантное многообразие этой системы.

Если силы, действующие на систему, потенциальны, то уравнения движения (1.3) представляются в форме

$$\left(\frac{L}{\dot{\mathbf{q}}}\right)^{\cdot} - \frac{L}{\mathbf{q}} = \sum_{\mu}\lambda_\mu\frac{f_\mu}{\dot{\mathbf{q}}}, \quad L = T - U, \tag{1.6}$$

где L — функция Лагранжа системы без учета связей, а T, U — кинетическая и потенциальная энергия, соответственно.

Уравнения Пуанкаре–Суслова. Укажем еще одну форму уравнений движения, очень удобную для составления уравнений неголономных систем, встречающихся в реальных примерах.

Для конфигурационного пространства $\mathcal{M}$ определим некоординатный базис векторных полей по формуле

$$\mathbf{E}_i = \sum_j G_{ji}(\mathbf{q})\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_i = \frac{}{\mathbf{q}_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.7}$$

Используя (1.7), для скоростей, связей и функции Лагранжа системы получим

$$\dot{q}_i = \sum_j G_{ij}(\mathbf{q})w_j, \quad f_\mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \hat{f}_\mu(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = 0,$$
$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \hat{L}(\mathbf{q}, \mathbf{w}),$$

где $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ — компоненты скорости системы в базисе $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n$. Величины w_i иногда называют параметрами Пуанкаре.

В общем случае коммутаторы векторных полей (1.7) представляются в форме

$$[\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j] = \sum_k c_{ij}^k(\mathbf{q})\mathbf{E}_k. \tag{1.8}$$

Конфигурационное пространство и кинематические соотношения. Конфигурационное пространство рассматриваемой системы представляет собой произведение $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3 \otimes SO(3)$, где первый сомножитель описывает положение центра масс тела, а второй — ориентацию тела. Определим две системы координат:

- *неподвижная* $OXYZ$ — начало O располагается в некоторой точке плоскости, а ось OZ перпендикулярна плоскости;

- *подвижная* $Cxyz$ — начало C совпадает с центром масс тела, а оси направлены вдоль главных осей инерции.

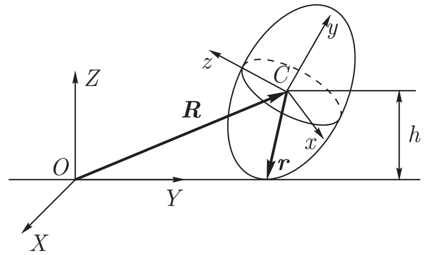


Рис. 1. Тело на плоскости

Пусть α, β, γ — орты неподвижного пространства (т. е. единичные векторы осей $OXYZ$), спроецированные на подвижные оси $Cxyz$, $\mathbf{R} = (R_1, R_2, R_3)$ — координаты центра масс тела в неподвижных осях $OXYZ$; если определить ортогональную матрицу

$$\mathbf{Q} = \begin{Vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{Vmatrix} \in SO(3), \tag{1.9}$$

то пара $(\mathbf{R}, \mathbf{f}Q) \in \mathbb{R}^3 \otimes SO(3)$ однозначно определяет положение тела.

Пусть $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — угловая скорость и скорость центра масс тела, спроецированные на подвижные оси $Oxyz$. В соответствующем базисе векторных полей (1.7) получим

$$\begin{gathered} \omega = \sum_k \omega_k \xi_k, \quad \xi_k = -\sum_{i,j} \varepsilon_{kij} \left(\alpha_i \frac{}{\alpha_j} + \beta_i \frac{}{\beta_j} + \gamma_i \frac{}{\gamma_j} \right), \\ \mathbf{v} = \sum_k v_k \zeta_k, \quad \zeta_k = \alpha_i \frac{}{R_1} + \beta_i \frac{}{R_2} + \gamma_i \frac{}{R_3}, \end{gathered} \tag{1.10}$$

соответствующие коммутаторы (1.8) имеют вид

$$[\xi_i, \xi_j] = \varepsilon_{ijk} \xi_k, \quad [\xi_i, \zeta_j] = \varepsilon_{ijk} \zeta_k, \quad [\zeta_i, \zeta_j] = 0. \tag{1.11}$$

Кроме того, выполнены следующие кинематические соотношения

$$\dot{\mathbf{Q}} = \tilde{\omega} \mathbf{Q}, \quad \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{f} Q^{-1} \mathbf{v}, \tag{1.12}$$

где $\tilde{\omega} = \|\tilde{\omega}_{ij}\|$ — кососимметрическая матрица, компоненты которой отождествляются с угловыми скоростями по обычному правилу

$$\tilde{\omega}_{ij} = \varepsilon_{ijk} \omega_k.$$

§ 2. Неголономность связей и некоторые изоморфизмы

Однородный мраморный шар на абсолютно шероховатой плоскости. В данном случае выберем неподвижную систему координат $OXYZ$, ось OZ которой перпендикулярна плоскости. Обозначим шаровой центр инерции $\mathbf{I} = \mu \mathbf{E}$, b — радиус шара, $\mathbf{r} = (X, Y, Z), \mathbf{v}$ — радиус-вектор и скорость центра шара, ω — его угловая скорость.

Условие отсутствия проскальзывания (абсолютная шероховатость), как было показано выше, выражается в том, что скорость точки контакта равна нулю

$$\mathbf{v} + \omega x \mathbf{r} = 0, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{r} = -b \mathbf{e}_z$ — вектор из центра шара в точку контакта (см. рис. 2).

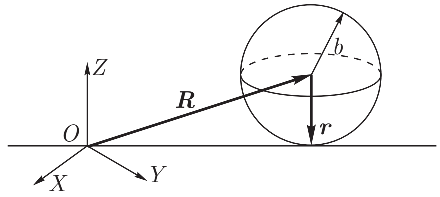


Рис. 2. Шар на плоскости

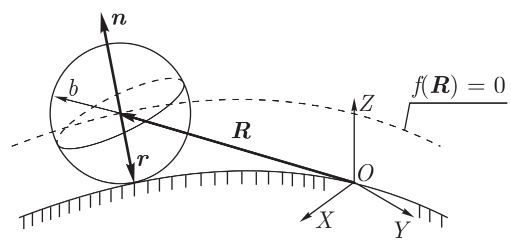


Рис. 3. Шар на произвольной поверхности

Однородный резиновый шар на (выпуклой) поверхности. Как и выше, выберем неподвижную систему координат $OXYZ$ и запишем уравнение поверхности, проходящей через центр шара в форме

$$f(\mathbf{r}) = 0, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор центра шара.

Ясно, что поверхность (2.2) эквидистантна опорной поверхности и их нормали совпадают и сонаправлены с вектором $\mathbf{r}$ из центра шара в точку контакта

$$\mathbf{r} = -b\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \frac{\nabla f(\mathbf{r})}{|\nabla f(\mathbf{r})|},$$

где b — радиус шара.

Связи, выражающие условия непроскальзывания и отсутствия верчения, можно представить в форме

$$\mathbf{v} + \omega x\mathbf{r} = 0, \quad (\omega, \mathbf{r}) = 0, \tag{2.3}$$

где $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ — скорость центра шара, ω — его угловая скорость.

§ 3. Законы сохранения в неголономной механике

Рассмотрим подробнее законы сохранения и соответствующие (тензорные) инварианты, которые могут встречаться в неголономной механике. Представим уравнения движения в стандартной форме уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \tag{3.1}$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ — векторное поле на фазовом пространстве, определяемое системой (1.6). Как правило, в рассматриваемых примерах $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ задается аналитическими функциями, что мы и будем предполагать в дальнейшем.

Интегралы и поля симметрий. Закон сохранения энергии. Наиболее простыми инвариантами системы (3.1) являются первые интегралы и поля симметрий. Напомним, что функция $F(\mathbf{x})$ — первый интеграл, если

$$\dot{F} = (\nabla F, \mathbf{v}(\mathbf{x})) = 0,$$

векторное поле $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — поле симметрий, если

$$[\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{v}(\mathbf{x})] = 0, \tag{3.2}$$

где $[\cdot,\cdot]$ — скобка Ли в фазовом пространстве.

Для уравнений неголономной механики при достаточно общих допущениях выполняется закон сохранения энергии. Так, для уравнений Пуанкаре–Суслова справедлива

Теорема 1. Пусть функция Лагранжа $\hat{L}(\mathbf{q},\mathbf{w})$ и связи $\hat{f}_\mu(\mathbf{q},\mathbf{w}) = 0$ не зависят явно от времени, и, кроме того, связи задаются однородными функциями по переменным w_i, тогда система допускает интеграл энергии

$$\mathcal{E} = \sum w_i \frac{\hat{L}}{w_i} - \hat{L}. \tag{3.3}$$

Пуассонова структура. Гамильтоновость и конформная гамильтоновость. Еще одним важным тензорным инвариантом, встречающимся в неголономных системах является пуассонова структура, которая позволяет представить систему в гамильтоновой форме.

Напомним, что наиболее общей формой гамильтоновой системы является (см. подробно [2])

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x})\nabla H, \tag{3.4}$$

где $H(\mathbf{x})$ — гамильтониан, а $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \|J_{ij}(\mathbf{x})\|$ — пуассонова структура (тензор Пуассона и т. п.), то есть кососимметрическое тензорное поле, удовлетворяющее тождеству Якоби

$$\frac{J_{ij}(\mathbf{x})}{x_k} + \frac{J_{jk}(\mathbf{x})}{x_i} + \frac{J_{ki}(\mathbf{x})}{x_j} = 0. \tag{3.5}$$

Пуассонова структура естественным образом позволяет определить скобку Пуассона функций f, g по формуле

$$\{f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\} = \sum_{i,j} J_{ij}(\mathbf{x}) \frac{f}{x_i}\frac{g}{x_j}.$$

Для гамильтоновых систем (3.4) *имеется очевидный первый интеграл — гамильтониан* $H(\mathbf{x})$ *и заведомо существует инвариантная мера (согласно теореме Лиувилля).*

Гамильтоновы системы — это наиболее изученный класс систем с точки зрения теории интегрируемости, устойчивости, топологического анализа и т. д. В связи с этим изучение возможности (или невозможности) представления уравнений неголономной механики в гамильтоновой форме является очень важным при исследовании поведения системы.

Имеется еще один класс систем, практически неотличимых от гамильтоновых — это *конформно гамильтоновы системы*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{N}(\mathbf{x})\mathbf{J}(\mathbf{x})\nabla H, \tag{3.6}$$

где $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ — пуассонов тензор, а $\mathcal{N}(\mathbf{x})$ — непостоянная функция. Следуя Чаплыгину, функцию $\mathcal{N}(\mathbf{x})$ будем называть *приводящим множителем.*

Конформно гамильтоновы системы также сохраняют гамильтониан и допускают инвариантную меру.

Если $\mathcal{N}(\mathbf{x})$ — знакоопределенная функция, то заменой времени $\mathcal{N}(\mathbf{x})\,dt = d\tau$ система (3.6) приводится к гамильтоновой форме. Если $\mathcal{N}(\mathbf{x})$ в некоторых точках обращается в ноль, то замена времени приводит к гамильтоновым системам с особенностями, обладающими в некоторых случаях любопытными топологическими особенностями [17].

Многие системы неголономной механики представляются в конформно гамильтоновой форме (3.6) (см. ниже).

§ 4. Тяжелое резиновое тело вращения на плоскости

Уравнение, описывающее поверхность тела вращения, представляется в форме $f(r_1^2+r_2^2,r_3)=0$, а два главных момента инерции совпадают $I_1=I_2$. Воспользуемся следующей параметризацией вектора $\mathbf{r}(\gamma)$:

$$\mathbf{r}=(\chi_1(\gamma_3)\gamma_1,\chi_1(\gamma_3)\gamma_2,\chi_2(\gamma_3)).$$

Функции χ_1,χ_2 определяются конкретным видом поверхности тела, но не являются независимыми, поскольку они связаны очевидным соотношением $f(\chi_1^2(1-\gamma_3^2),\chi_2)=0$.

Потенциальная энергия тела записывается в виде

$$U(\gamma_3)=-mg(\chi_1(1-\gamma_3^2)+\chi_2\gamma_3).$$

Помимо геометрического интеграла и связи

$$\gamma^2=1,\quad (\omega,\gamma)=0,$$

система вследствие теоремы 1 обладает интегралом энергии

$$\mathcal{E}=\frac{1}{2}(\omega,\mathbf{I}\omega)+U(\gamma_3).$$

Кроме того, очевидно, что система в данном случае обладает полем симметрий, соответствующем вращению вокруг оси симметрии

$$\mathbf{u}(\gamma,\omega)=\omega_1\frac{}{\omega_2}-\omega_2\frac{}{\omega_1}+\gamma_1\frac{}{\gamma_2}-\gamma_2\frac{}{\gamma_1}.$$

Помимо этих достаточно очевидных законов сохранения система допускает еще один дополнительный интеграл

$$K=A(\gamma_3)\omega_3,\quad A(\gamma_3)=\sqrt{I_1\gamma_3^2+I_3(1-\gamma_3^2)+m(\mathbf{r},\gamma)^2}. \tag{4.1}$$

Существование подобного интеграла линейного по ω, как объясняется в работе [20] (см. раздел 2 этой работы), довольно закономерно, но то, что интеграл выражается с помощью элементарных функций по ω,γ для произвольной поверхности тела — является нетривиальным фактом. Так, например, в динамике тела вращения на плоскости при наличии верчения интеграл выражается в элементарных функциях лишь в случае шаровой поверхности тела.

Согласно теореме Ли, найденных интегралов и полей симметрий достаточно, чтобы свести систему к квадратурам. Параметризуем вектор γ углом нутации θ и собственного вращения φ:

$$\gamma=(\sin\theta\sin\varphi,\sin\theta\cos\varphi,\cos\theta),$$

тогда на поверхности $\mathcal{M}_{h,k}=\{\omega,\gamma|\gamma^2=1,(\omega,\gamma)=0,\mathcal{E}=h,K=k\}$ получим следующие соотношения

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}B(\gamma_3)\dot\theta^2+\frac{k^2}{2\sin^2\theta}+U(\gamma_3)=h,\quad \omega_3=\frac{k}{A(\gamma_3)},\\ \dot\varphi=\frac{\omega_3}{\sin^2\theta},\quad \omega_1=\dot\theta\cos\varphi-\omega_3\operatorname{ctg}\theta\sin\varphi,\quad \omega_2=-\dot\theta\sin\varphi-\omega_3\operatorname{ctg}\theta\cos\varphi,\end{gathered} \tag{4.2}$$

где $B(\gamma_3)=I_1+m(\mathbf{r},\mathbf{r})$.

Укажем квадратуру для угла нутации θ в случае простейших тел:

- *диск со смещенным центром масс (см. рис. 4)*:

$$\chi_1=-\frac{R}{\sin\theta},\quad \chi_2=-a$$

$$\frac{1}{2}(I_1+m(R^2+a^2))\dot\theta^2=h-mg(R\sin\theta+a\cos\theta)-\frac{1}{2}\frac{k^2}{\sin^2\theta};$$

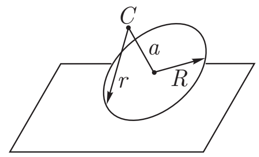


Рис. 4. Диск на плоскости

- *шар со смещенным центром*:

$$\chi_1 = -R, \quad \chi_2 = -R\cos\theta - a$$

$$\frac{1}{2}(I_1 + m(R^2 + a^2) + 2mRa\cos\theta)\dot{\theta}^2 = h - mg(R + a\cos\theta) - \frac{1}{2}\frac{k^2}{\sin^2\theta}.$$

§ 5. Шар Чаплыгина

Уравнения движения и законы сохранения. Уравнения движения представим в форме

$$\begin{gathered}\dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \boldsymbol{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + D\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{I}_Q\boldsymbol{\omega}, \quad D = mR^2,\end{gathered} \tag{5.1}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ угловая скорость шара, $\boldsymbol{\gamma}$ орт вертикали в подвижных осях, $\mathbf{I} = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$ тензор инерции шара относительно его центра, m и R масса и радиус шара, и $U = U(\boldsymbol{\gamma})$ потенциал внешнего осесимметричного поля. Вектор $\boldsymbol{M}$ имеет смысл кинетического момента шара относительно точки контакта, а тензор $\mathbf{I}_Q$ представляется в виде

$$\mathbf{I}_Q = \mathbf{J} - D\boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{I} + D\mathbf{E}.$$

Уравнения (при произвольном потенциале) обладают интегралом энергии, геометрическим интегралом и интегралом площадей:

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\omega}) + U(\boldsymbol{\gamma}), \quad (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = c = \mathrm{const}. \tag{5.2}$$

а также допускают инвариантную меру, указанную Чаплыгиным [18], $\rho_\mu\, d^3\boldsymbol{M}\, d^3\boldsymbol{\gamma}$, с плотностью

$$\rho_\mu = (\det \mathbf{I}_Q)^{-1/2} = \left[\det \mathbf{J}\left(1 - D\left(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma}\right)\right)\right]^{-1/2}. \tag{5.3}$$

В случае отсутствия внешнего поля $(U = 0)$, система обладает дополнительным интегралом

$$F = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}), \tag{5.4}$$

и следовательно является интегрируемой по теореме Эйлера–Якоби [18]. В работе [18], система (5.1) проинтегрирована в гиперэллиптических функциях.

Качественный анализ поведения шара Чаплыгина выполнен в работе [25] (устойчивость частных решений исследовалась также в [26]).

Шар Чаплыгина как обобщенная система Чаплыгина. Покажем теперь, что система (5.1), описывающая качение шара Чаплыгина, является обобщенной системой Чаплыгина, и скобка может быть получена с помощью метода приводящего множителя.

Как и в задаче Веселовой воспользуемся локальными координатами: углами Эйлера θ, φ, ψ и декартовыми координатами центра цилиндра x, y.

Уравнения связей, выражающие условия отсутствия проскальзывания точки контакта, можно представить в форме

$$f_x = \dot{x} - R\dot{\theta}\sin\psi + R\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi = 0, \quad f_y = \dot{y} + R\dot{\theta}\cos\psi + R\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi = 0. \tag{5.5}$$

Уравнения движения с неопределенными множителями Лагранжа имеют вид

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot x}\right) = \lambda_x, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot y}\right) = \lambda_y, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot\psi}\right) = 0, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial T_0}{\partial \theta} = \lambda_x \frac{\partial f_x}{\partial \dot\theta} + \lambda_y \frac{\partial f_y}{\partial \dot\theta}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial T_0}{\partial \varphi} = \lambda_x \frac{\partial f_x}{\partial \dot\varphi} + \lambda_y \frac{\partial f_y}{\partial \dot\varphi},
\end{gathered} \tag{5.6}
$$

где T_0 кинетическая энергия шара без учета связей (5.5) ((которая очевидно не зависит от x, y, и ψ):

$$
T_0 = \frac{1}{2} m(\dot x^2 + \dot y^2) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}).
$$

Исключая неопределенные множители λ_x и λ_y с помощью первых двух уравнений в (5.6) и связей (5.5), находим

$$
\begin{aligned}
&\lambda_x \frac{\partial f_x}{\partial \dot\theta} + \lambda_y \frac{\partial f_y}{\partial \dot\theta} = -mR^2(\ddot\theta + \dot\psi\dot\varphi\sin\theta), \\
&\lambda_x \frac{\partial f_x}{\partial \dot\varphi} + \lambda_y \frac{\partial f_y}{\partial \dot\varphi} = -mR^2(\ddot\varphi\sin\theta + \dot\theta\dot\varphi\cos\theta - \dot\theta\dot\psi)\sin\theta.
\end{aligned}
$$

Следовательно уравнения движения для углов θ и φ не зависят от ψ, а зависят только от $\dot\psi$. Таким образом мы видим, что ψ — циклическая переменная и может быть исключена при помощи редукции Рауса, после чего уравнения движения для θ и φ могут быть записаны в форме

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta} = -\dot\varphi S, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varphi} = \dot\theta S, \\
S = mR^2 \sin\theta \left(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi\right).
\end{gathered} \tag{5.7}
$$

Здесь $\mathcal{R}$ — функция Рауса:

$$
\mathcal{R}(\theta, \varphi, \dot\theta, \dot\varphi) = T_0 - \dot\psi \frac{\partial T_0}{\partial \dot\psi},
$$

в которую $\dot x$ и $\dot y$ необходимо подставить из уравнений связей, а $\dot\psi$ исключается с помощью уравнения для циклического интеграла

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T_0}{\partial \dot\psi} &= (I_1 - I_2)\dot\theta \sin\theta \sin\varphi\cos\varphi + I_3\dot\varphi\cos\theta + \\
&+ \left((I_1\sin^2\varphi + I_2\cos^2\varphi)\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta\right)\dot\psi = c = \mathrm{const}.
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

Таким образом, мы представили уравнения движения в форме обобщенной системы Чаплыгина , и поскольку система обладает мерой, можем представить уравнения (5.7) в гамильтоновой форме.

Выполним замену времени вида

$$
N(\theta, \varphi)dt = d\tau, \tag{5.9}
$$

где $\mathcal{N} = \rho_\mu$ — плотность инвариантной меры (5.3).

В новом времени уравнения движения примут вид

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \bar{\mathcal{R}}}{\partial \theta'}\right) - \frac{\partial \bar{\mathcal{R}}}{\partial \theta} = -\varphi'\bar S, \quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \bar{\mathcal{R}}}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial \bar{\mathcal{R}}}{\partial \varphi} = \theta'\bar S, \\
\bar S = c(I_3 + mR^2)mR^2\mathcal{N}^3\sin\theta(I_1\cos^2\varphi + I_2\sin^2\varphi + mR^2),
\end{gathered} \tag{5.10}
$$

где $\theta' = \dfrac{d\theta}{d\tau} = \mathcal{N}^{-1}\dot\theta$, $\varphi' = \dfrac{d\varphi}{d\tau} = \mathcal{N}^{-1}\dot\varphi$, $\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R}(\theta, \dot\theta, \varphi, \dot\varphi)\big|_{\dot\theta = \mathcal{N}\theta',\, \dot\varphi = \mathcal{N}\varphi'}$.

Шар Чаплыгина с гиростатом. При добавлении к катящемуся по плоскости шару ротора, который вращается с постоянной угловой скоростью, уравнения движения (5.1) записываются в виде [14]

$$\dot{\boldsymbol{M}} = (\boldsymbol{M} + \boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{M} = \mathbf{I}_Q \boldsymbol{\omega},$$

где $\boldsymbol{k}$ — постоянный вектор гиростатического момента. Аналогично для уравнений (5.7) необходимо выбрать

$$T_0 = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) + (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{k}).$$

Эта система обладает той же инвариантной мерой (5.3) и к ней, очевидно, также применим метод приводящего множителя, при этом для соответствующей функции $\bar{S}$ справедливо

$$\bar{S} = N^3 D \sin\theta \left(cJ_3(J_1 \cos^2\varphi + J_2 \sin^2\varphi) + \det \mathbf{J}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{k}) \right).$$

Используя скобку с новой функцией $\bar{S}$, находим коммутационные соотношения для компонент векторов $\boldsymbol{L} = \rho_\mu(\boldsymbol{M} + \boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} \left(L_k - D \det \mathbf{J} \left(\rho_\mu^2 (\boldsymbol{L}, \boldsymbol{\gamma}) - (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{k}) \right) \gamma_k \right), \quad \{L_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk}\gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0.$$

§ 6. Шар Чаплыгина на сфере

Уравнения движения и интегрируемые случаи. Уравнения, описывающие движение без проскальзывания тела, ограниченного сферической поверхностью по сферическому основанию, могут быть записаны в виде [8]

$$\dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{n}} = k\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\omega}, \quad k = \frac{a}{a+b}, \tag{6.1}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела, $\boldsymbol{n}$ — нормаль в точке контакта, a — радиус сферического основания, b — радиус сферической оболочки тела (рис. 5). Здесь и далее все векторы и тензоры заданы в (подвижной) системе координат, связанной с главными осями движущегося тела. Момент в точке контакта $\boldsymbol{M}$ связан с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ линейным соотношением

$$\boldsymbol{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + d\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\omega}), \quad d = mb^2,$$

где m — масса тела, $\mathbf{I} = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — центральный тензор инерции. Коэффициент k может принимать любые положительные и отрицательные значения в зависимости от возможных ситуаций (см. рис. 5).

Это так называемая задача о сферическом подвесе. Возможность изучения гироскопов со сферическим подпятником на сферическом основании была указана Контенсу [23] в связи со стабилизацией гироскопа Флериэ.

Случай $k = 1$ соответствует $a \to \infty$, то есть качению шара по плоскости (шар Чаплыгина); как известно, эта система является интегрируемой, и описана во многих работах [11, 18, 20, 25].

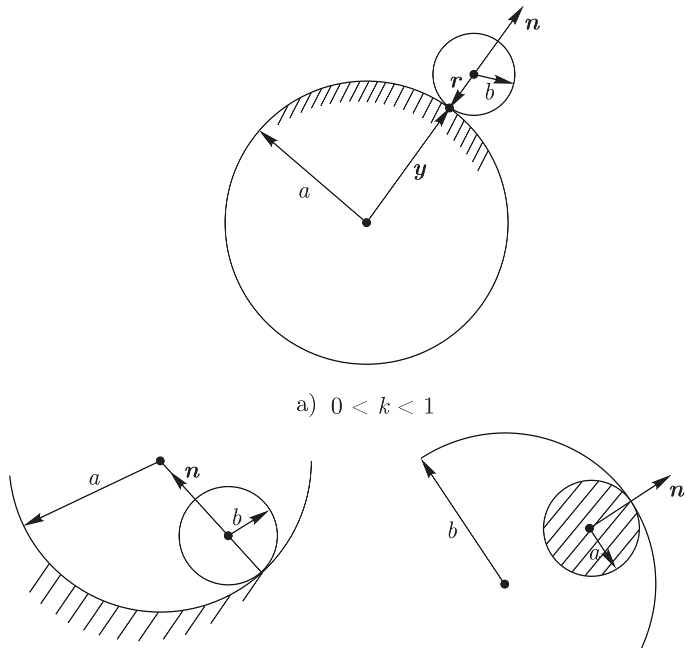
При произвольном k система (6.1) имеет три интеграла движения

$$F_0 = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}) = 1, \quad H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\omega}), \quad F_1 = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}) \tag{6.2}$$

и допускает инвариантную меру $\rho\, d\boldsymbol{\omega}\, d\boldsymbol{n}$ с плотностью [19]

$$\rho^2 = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}) - d(\boldsymbol{n}, (\mathbf{I} + d)^{-1}\boldsymbol{n}).$$

Известен еще один замечательный интегрируемый случай системы (6.1) при $k = -1$ (А. В. Борисов, Ю. Н. Федоров [8]), который соответствует обкату неподвижного шара телом



a) $0 < k < 1$

b) $k > 1$ c) $k < 0$

Рис. 5. Качение тела со сферическим участком по сфере. Штриховкой обозначена неподвижная поверхность

со сферической полостью (рис. 5c), при этом отношение радиусов сферы и шара равно $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2}$. Линейный дополнительный интеграл в этом случае имеет вид (аналог интеграла площадей)

$$F_2 = (\mathbf{A}\boldsymbol{M}, \boldsymbol{n}), \tag{6.3}$$

где $\mathbf{A} = \operatorname{diag}(\frac{1}{2}(-I_1 + I_2 + I_3), \frac{1}{2}(I_1 - I_2 + I_3), \frac{1}{2}(I_1 + I_2 - I_3))$.

Отметим, что аналогичная система (при $k = -1$) при добавлении дополнительной связи $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{n}) = 0$, исключающей верчение, также является интегрируемой, ее явное интегрирование выполнено в работе [21].

Представление в форме системы Чаплыгина и конформная гамильтоновость при $k = -1$. Покажем, каким образом можно явно проинтегрировать систему (6.1) при $k = -1$ в квадратурах на нулевом уровне интеграла $F_2 = 0$ [7]. Эта задача аналогична интегрированию уравнений движения задачи Чаплыгина (о качении шара по плоскости) при нулевой постоянной интеграла площадей [18] (см. также [6, 25]), однако существенно сложнее. Случай $F_2 \neq 0$ мы пока не рассматриваем.

Прежде всего выразим угловую скорость при $F_2 = 0$ из уравнений (6.1) по формуле

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{B}\boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{n}}}{(\boldsymbol{n}, \mathbf{B}\boldsymbol{n})}, \quad \mathbf{B} = (\mathbf{I} + d - d\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n})\mathbf{A}. \tag{6.4}$$

Определим сфероконические координаты u, v на сфере $\boldsymbol{n}^2 = 1$ по формуле

$$n_i^2 = \frac{(J_i - u)(J_i - v)}{(J_i - J_j)(J_i - J_k)}, \quad i \neq j \neq k \neq i, \quad J_i = I_i + d. \tag{6.5}$$

При помощи выражений (6.5) представим уравнения движения (6.1) в форме системы Чаплыгина

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial T}{\partial u} = \dot{u}\Phi, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{v}} - \frac{\partial T}{\partial v} = -\dot{v}\Phi, \tag{6.6}$$

где $T=\frac{1}{2}(b_{uu}\dot{u}^2+b_{uv}\dot{u}\dot{v}+b_{vv}\dot{v}^2)$ — интеграл энергии H (6.2), выраженный на уровне $F_2=0$ в сфероконических координатах, $\Phi=(a_u\dot{u}+a_v\dot{v})$ — линейная однородная по скорости функция. Из-за громоздкости мы не приводим здесь явные выражения для T, Φ.

Согласно методу приводящего множителя Чаплыгина после замены времени $\mathcal{N}(u,\,v)\,dt=d\tau$ система (6.6) приводится к лагранжеву виду

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial T}{\partial u'}-\frac{\partial T}{\partial u}=0,\quad \frac{d}{d\tau}\frac{\partial T}{\partial v'}-\frac{\partial T}{\partial v}=0,\quad u'=\frac{du}{d\tau},\quad v'=\frac{dv}{d\tau}.$$

Приводящий множитель $\mathcal{N}$ совпадает с плотностью инвариантной меры $\mathcal{N}\,du\,dv\,dP_u\,dP_v$ (где $P_u=\frac{\partial T}{\partial \dot{u}}$, $P_v=\frac{\partial T}{\partial \dot{v}}$):

$$\mathcal{N}=\frac{2uv+(u+v)(2d+\alpha_1)+\alpha_2-d\alpha_1}{\sqrt{\det(\mathbf{I}+d-d\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n})}}(4\alpha_3+2\alpha_1\alpha_2-\alpha_1^3-d\alpha_1^2+\\ +(\alpha_1^2-2\alpha_2+4d\alpha_1)(u+v)-4d(u+v)^2)^{-1},$$

где $\alpha_1=\sum J_i$, $\alpha_2=\sum J_i^2,\alpha_3=J_1J_2J_3$.

Таким образом, после замены времени получаем гамильтонову систему на двумерной сфере S^2, которую можно представить в форме уравнений на специальной (нулевой) орбите коалгебры $e(3)$. В нашем случае окончательно получим

$$\begin{gathered}H=\frac{\delta\det\mathbf{J}}{8(\boldsymbol{\gamma},\,\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma})^2}\sum_{i=1}^{3}c_im_i^2,\quad F_2=\frac{\rho^2}{4(\boldsymbol{\gamma},\,\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma})^2}(\delta^2\boldsymbol{m}^2-4\sum_{i=1}^{3}d_im_i^2),\\ \delta=(\boldsymbol{\gamma},\,\mathbf{J}\bar{\mathbf{A}}\boldsymbol{\gamma})-d(\boldsymbol{\gamma},\,\bar{\mathbf{A}}\boldsymbol{\gamma})^2,\\ c_i=\frac{\rho^2\delta}{J_i}-4\prod_{k\neq i}(J_i-J_k)\gamma_i^2(\rho^2-\frac{d\delta}{4J_i\det\mathbf{J}}),\\ d_i=\prod_{k\neq i}(J_i-J_k)\gamma_i^2(\delta(J_i+d)-(\boldsymbol{\gamma},\,\mathbf{J}(\mathbf{J}+d)\bar{\mathbf{A}}^2\boldsymbol{\gamma})+2d(\boldsymbol{\gamma},\,\mathbf{J}\bar{\mathbf{A}}\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\gamma},\,\bar{\mathbf{A}}\boldsymbol{\gamma})),\end{gathered}\tag{6.7}$$

где $\bar{\mathbf{A}}=2\mathbf{A}$. Скобки Пуассона определены соотношениями

$$\{m_i,\,m_j\}=\varepsilon_{ijk}m_k,\quad \{m_i,\,\gamma_j\}=\varepsilon_{ijk}\gamma_k,\quad \{\gamma_i,\,\gamma_j\}=0,$$

а орбита фиксируется значением интегралов

$$\boldsymbol{\gamma}^2=1,\quad (\boldsymbol{m},\,\boldsymbol{\gamma})=0.$$

§ 7. Динамически несимметричный неуравновешенный шар на плоскости

Остановимся подробнее на движении по плоскости динамически несимметричного шара, центр масс которого не связан с геометрическим центром. Как и выше рассмотрим две неголономные модели качения:

1. Качение без проскальзывания, но с верчением (мраморный шар)

2. Качение без проскальзывания и верчения (резиновый шар)

Будем предполагать, что внешние силы отсутствуют.

Мраморный шар. По аналоги с задачей о шаре Чаплыгина представим уравнения движения этой системы в виде

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{M}}=\mathbf{M}x\omega+m\dot{\mathbf{r}}x(\omega x\mathbf{r}),\quad \dot{\mathbf{r}}=(\mathbf{r}-\mathbf{a})x\omega,\\ \mathbf{M}=\mathbf{I}\omega+m\mathbf{r}x(\omega x\mathbf{r}),\end{gathered}\tag{7.1}$$

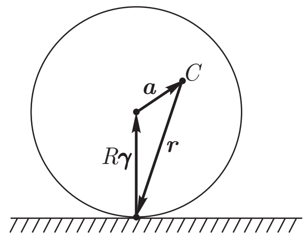


Рис. 6. Шар со смещенным центром на плоскости

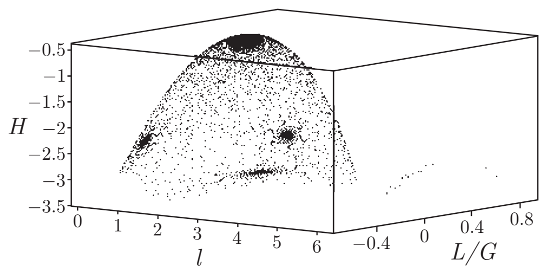


Рис. 7. Показано трехмерное сечение Пуанкаре для системы (7.1), взятое из работы [20]. Одна из траекторий в задаче о качении неуравновешенного шара по плоскости. Из рисунка видно, что все точки ложатся на некоторую поверхность, сгущения точек соответствуют асимптотическому приближению траектории к периодическим решениям. Траектория выходит из вершины и приближается к трем точкам снизу поверхности

где $\mathbf{a}$ — вектор, соединяющий центр масс с геометрическим центром, $\mathbf{r} = -R\gamma - \mathbf{a}$ (см. рис. 6), m — масса шара.

Система (7.1), как и всякое тело на абсолютно шероховатой плоскости, допускает геометрический интеграл и интеграл энергии

$$F_1 = \gamma^2 = 1, \quad H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \omega). \tag{7.2}$$

Помимо этих (очевидных) интегралов система (7.1) допускает еще один квадратичных интеграл

$$F_2 = (\mathbf{M}, \mathbf{M}) - m(\mathbf{r}, \mathbf{r})(\mathbf{M}, \omega). \tag{7.3}$$

Этот интеграл является обобщением интеграла $\mathbf{M}^2 = const$ в задаче о шаре Чаплыгина (см. раздел). Как мы видим, для интегрируемости по теореме Эйлера–Якоби не хватает еще одного первого интеграла и инвариантной меры. Как показывают численные эксперименты [20], в общем случае оба эти инварианта отсутствуют.

Интеграл (7.3) обобщается на случай качения шара по сфере.

Резиновый шар. В случае отсутствия верчения в уравнениях движения для произвольного тела необходимо, как и в предыдущем случае, положить $\mathbf{r} = -R\gamma - \mathbf{a}$:

В данном случае к интегралам (7.2) добавляется уравнение связи

$$(\omega, \gamma) = 0,$$

и, кроме того, аналог интеграла (7.3), который в данном случае принимает вид

$$F_2 = |\tilde{\mathbf{I}}\omega x\gamma|^2 - 2Rm(\gamma, \mathbf{a})(\tilde{\mathbf{I}}\omega, \omega). \tag{7.4}$$

При $\mathbf{a} = 0$ этот интеграл, как и следовало, ожидать переходит в интеграл системы Веселовой.

Таким образом, для интегрируемости системы по теореме Эйлера–Якоби не хватает инвариантной меры.

В то же время общая поверхность уровня первых интегралов системы (интегральное многообразие) является двумерной. По крайней мере при малых $\mathbf{a}$, интегральное многообразие общего положения представляет собой двумерный тор, так как является возмущением интегральных многообразий (инвариантных торов) системы Веселовой. Следовательно у данной системы (вследствие двумерности инвариантных многообразий) отсутствуют хаотические траектории, типичные как для гамильтоновых систем (заполняющие трехмерный хаотический слой), так и для диссипативных (странных аттракторов в двумерных системах не возникают).

Как мы видим, вопрос о существовании или отсутствии инвариантной меры в данном случае сводится к исследованию потока на инвариантных двумерных торах [12, 15]. В случае существования интегрального инварианта возможны лишь периодические и квазипериодические траектории, в то же время в общем случае на таком торе может возможны асимптотические траектории и в частности могут возникать предельные циклы. Предварительные численные эксперименты в данном случае указывают на возможность существования инвариантной меры, хотя явно она не найдена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аргатов, И. И., Условия равновесия твердого тела на шероховатой плоскости при осесимметричном распределении нормальных давлений, *Изв. АН СССР, Мех. тв. тела*, 2005, № 2, с. 15–26.

2. Борисов, А. В., Мамаев, И. С., *Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике,* М.-Ижевск: Изд-во «РХД», 1999, 464 с.

3. Борисов, А. В., Мамаев, И. С., Шар Чаплыгина, задача Суслова и задача Веселовой. Интегрируемость и реализация связей, в сб. *Неголономные динамические системы*, М.-Ижевск: Изд-во «РХД», ИКИ, 2002, с. 118–130.

4. Борисов, А. В., Мамаев, И. С., Интегрируемая система с неинтегрируемой связью, *Мат. зам.*, 2006, т. 80, № 1, с. 131–134.

5. Борисов, А. В., Мамаев, И. С., Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении шара, *Мат. зам.*, 2001, т. 70, № 5, с. 793-2795.

6. Борисов, А. В., Мамаев, И. С., Изоморфизм и гамильтоново представление некоторых неголономных систем, *Сиб. мат. жур.*, 2007, т. 48, №1, с. 33–45; arxiv.org/pdf/nlin.SI/0509036.

7. Борисов, А. В., Мамаев, И. С., Марихин, В. Г., Явное интегрирование одной неголономной задачи, *Доклады РАН*, 2008 (в печати).

8. Борисов, А. В., Федоров, Ю. Н., О двух видоизмененных интегрируемых задачах динамики, *Вестн. МГУ, сер. мат. мех.*, 1995, № 6, с. 102–105.

9. Веселов, А. П., Веселова, Л. Е., Интегрируемые неголономные системы на группах Ли, *Мат. заметки*, 1988, т. 44, № 5, с. 604–619.

10. Журавлев, В. Ф., О модели сухого трения в задачах динамики твердых тел, *Успехи механики*, 2005, No. 3, с. 58-76.

11. Козлов, В. В., К теории интегрирования уравнений неголономной механики, *Успехи механики*, 1985, т. 8, № 3, с. 85–101; Kozlov, V.V., On the Integration Theory of Equations of Nonholonomic Mechanics, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2002, vol. 7, no. 2, pp. 191–176.

12. Корнфельд, И. П., Синай, Я. Г., Фомин, С. В., *Эргодическая теория*, М.: Наука, 1980.

13. Марихин, В. Г., Соколов, В. В., О парах коммутирующих гамильтонианов, квадратичных по импульсам, *ТМФ*, т. 149, №2, 2006, с. 147–160.

14. Маркеев, А. П., Об интегрируемости задачи о качении шара с многосвязной полостью, заполненной идеальной жидкостью, *Изв. АН СССР, Мех. тв. тела*, 1986, т. 21, № 1, с. 64–65.

15. Пуанкаре, А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, М.: Изд-во иностр. лит, 1947.

16. Суслов, Г. К., *Теоретическая механика*, М.-Л.: Гостехиздат, 1946. Уточн. репринты

17. Татаринов, Я. В. *Разделяющие переменные и новые топологические явления в голономных и неголономных системах*, Труды семинара по векторн. и тензорн. анализу, МГУ, 1988, вып. XXIII, с. 160–174.

18. Чаплыгин, С. А., *О катании шара по горизонтальной плоскости.* Собр. соч., т. 1, М.-Л.: ОГИЗ, 1948, с. 76–101.

19. Ярощук, В. А., Новые случаи существования интегрального инварианта в задаче о качении твердого тела без проскальзывания по неподвижной поверхности, *Вестник МГУ, сер. мат. мех.*, 1992, №6, с. 26–30.

20. Borisov, A. V. and Mamaev, I. S., The Rolling of Rigid Body on a Plane and Sphere. Hierarchy of Dynamics, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2002, vol. 7, no. 1, pp. 177–200.

21. Borisov, A. V. and Mamaev, I. S., Rolling of a Non-homogeneous Ball Over a Sphere Without Slipping and Twisting, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2007, vol. 12, no. 2, pp. 153–159.

22. Chow, W. L., Über Systeme von linearen partiellen Differential Gleichungen erster Ordnung, Math. Ann., 1939, bd. 117, p. 98–105.

23. Contensou, P., Couplage entre frottement de glissement et frottement de pivotement dans la théorie de la toupie, *Kreiselprobleme Gydrodynamics: IUTAM Symp. Celerina*, Berlin: Springer, 1963, pp. 201–216. Пер. на рус.: Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка. В кн.: *Проблемы гироскопии.* М.: Мир, 1967, с. 60–77.

24. Ferrers, N. M., Extension of Lagrange's Equations, *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 1872, vol. 12, no. 45, pp. 1–5.

25. Kilin, A. A., The dynamics of Chaplygin ball: the qualitative and computer analisis, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2001, v. 6, no. 3, p. 291—306.

26. Schneider, D. A., Non-holonomic Euler–Poincaré Equations and Stability in Chaplygin's Sphere, *Dyn. Sys.*, 2002, vol. 17, no. 2, pp. 87–130.

Поступила в редакцию 27.02.09

I. S. Mamaev

Multipurpose software system for research of mechanical systems with nonholonomic constraints

We consider different mechanical systems with nonholonomic constraints; in particular, we examine the existence of tensor invariants (laws of conservation) and their connection with the behavior of a system. Considerable attention is given to the possibility of conformally Hamiltonian representation of the equations of motion, which is mainly used for the integration of the considered systems.

Keywords: nonholonomic systems, implementation of constraints, conservation laws, hierarchy of dynamics, explicit integration.

Mathematical Subject Classifications: 34D20, 70E40, 37J35

Мамаев Иван Сергеевич, д. ф.-м. н., Институт компьютерных исследований, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: mamaev@ics.org.ru