

УДК 532.785:532.73-3

© Т. Б. Иванова, В. В. Васькин

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ КИНЕТИКИ ОБРАЗОВАНИЯ НОВОЙ ФАЗЫ

В работе рассмотрена обобщенная модель образования новой фазы, объединяющая три основные стадии процесса роста при фазовом переходе первого рода. Получено численное решение кинетического уравнения Фоккера–Планка. Исследована зависимость решения от параметров системы, выявлены области применимости допущений, сделанных Зельдовичем, Лифшицем и Слезовым, и показано, что в зависимости от параметров системы можно получить как равновесное распределение, так и авто-модельное распределение Лифшица–Слезова. При некоторых значениях параметров уравнение имеет осциллирующее решение.

Ключевые слова: фазовый переход, зародышеобразование, кинетическое уравнение Фоккера–Планка, коалесценция.

Введение

Теоретические исследования процесса образования и роста зародышей новой фазы при фазовых переходах первого рода ведутся постоянно. Основная причина исследований в данном направлении – большое количество современных технологических процессов, при которых происходят типичные фазовые переходы первого рода, например, затвердевание расплавов, конденсация тонких пленок из жидкости и пара и другие.

В работах, посвященных исследованию кинетики фазового перехода, вплоть до конца 80-х годов прошлого века применялись аналитические методы вычислений, которые были основаны на теории Лифшица–Слезова–Вагнера или их модификации [1–5].

Кинетическая функция распределения может быть определена как решение уравнения Фоккера–Планка (т. к. относительное изменение размера зародыша в результате присоединения молекул мало для макроскопического зародыша):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} = I, \quad (1)$$

где f — кинетическая функция распределения, \vec{S} — вектор плотности потока в пространстве размеров, I — источник, определяющий термодинамическую вероятность образования зародышей, является функцией радиуса и времени.

Так как зародыш, по сути, является трехмерным, функция распределения должна быть отнесена к элементу объема da^3 , и уравнение Фоккера–Планка нужно записать для функции $4\pi a^2 f$, отнесенной к элементу da :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial a} (a^2 \cdot S) + I(a, t), \quad (2)$$

где S — плотность потока в пространстве размеров определяется как

$$S = -B \frac{\partial f}{\partial a} + Af, \quad (3)$$

A — коэффициент, определяющий скорость роста, B — коэффициент диффузии зародышей по размерам:

$$A = \frac{DV' \Delta}{a^2} (a - a_k), \quad (4)$$

$$B = \frac{DV' \Delta T a_k}{8\pi \alpha a^3}, \quad (5)$$

где D — коэффициент диффузии (определяющий подвод вещества из окружающего раствора), V' — молекулярный объем вещества, c — концентрация вещества в растворе, c_0 — концентрация насыщенного раствора, $\Delta = c - c_0$ — концентрационное пересыщение, T — температура, a_k — критический радиус, соответствующий минимуму равновесной функции распределения, α — коэффициент поверхностного натяжения. Зародыши радиусом $a > a_k$ являются устойчивыми.

В работе [1] аналитически получено стационарное решение уравнения Фоккера–Планка (2) с учетом следующих упрощений:

- число образующихся зародышей постоянно (интенсивность источника не зависит от времени и пересыщения);
- нуклеация не обедняет раствор (закон сохранения растворенного вещества не рассматривается), пересыщение раствора постоянно;
- поток через критический радиус постоянный.

В подкритической области решение Зельдовича пропорционально равновесной функции $f_0(a)$ (рис. 1):

$$f_0(a) = C \exp\left(-\frac{R}{T}\right), \quad (6)$$

где C — коэффициент пропорциональности, T — температура, R — минимальная работа, которую необходимо затратить для создания зародыша радиуса a :

$$R = -\frac{8\pi\alpha a^3}{3a_k} + 4\pi\alpha a^2, \quad (7)$$

Однако в общем случае плотность потока — функция времени.

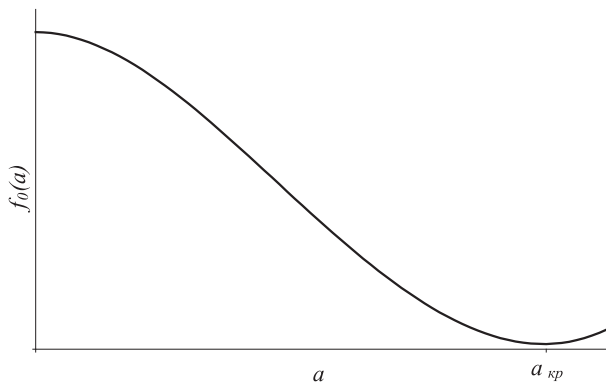


Рис. 1. Равновесная функция распределения, соответствует решению уравнения Фоккера–Планка на стадии нуклеации и начального роста зерен (при равновесии процессов зарождения и растворения)

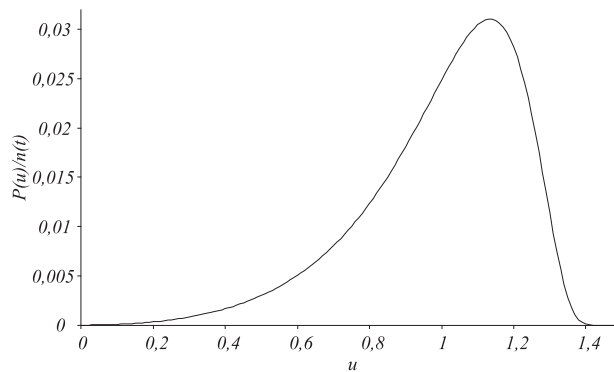


Рис. 2. Универсальное распределение Лифшица–Слезова, соответствующее решению уравнения Фоккера–Планка на стадии коалесценции (установившийся режим)

Другое приближение, допускающее аналитическое решение, рассмотрено в работе Лифшица и Слезова [2]: на стадии коалесценции, когда степень пересыщения раствора мала, значение диффузионного члена в выражении для плотности потока (3) много меньше переносного, и им можно пренебречь. Такое упрощение позволяет найти асимптотическое решение для функции распределения по размерам (в подвижной, связанной с критическим радиусом системе отсчета) (рис. 2):

$$f(u, t) = n(t) \cdot \frac{u^2 \exp[-1/(1 - 2u/3)]}{(u + 3)^{7/3} (3/2 - u)^{11/3}}, \quad (8)$$

где $n(t)$ — убывающая функция времени, $u = r/r_{kr}$.

Так как критический радиус непрерывно увеличивается, в неподвижной системе отсчета максимум функции распределения смещается вдоль оси радиуса со временем, абсолютное значение уменьшается, что соответствует образованию в процессе коалесценции малого количества зерен большого радиуса. Также в работе [2] впервые были получены асимптотики основных характеристик процесса коалесценции — пересыщения, критического радиуса, концентрации зерен новой фазы. Асимптотическое решение Лифшица–Слезова является универсальным и не зависит от начальной функции распределения.

Однако в реальных процессах диффузионный рост зерна из раствора может продолжаться и на поздней стадии фазового перехода. Такие зародыши будут размером меньше критического и в конечном итоге растворятся, но повлияют на скорость фазового перехода и конечное распределение по размерам. Конкурирующие процессы зарождения, роста и растворения в реальных процессах сопровождают все стадии перехода.

С развитием компьютерной техники и вычислительного эксперимента начали интенсивно развиваться и численные модели решения уравнения Фоккера–Планка, описывающего процессы образования новой фазы, с учетом закона сохранения массы. Примером такого решения является модель Кампманна–Вагнера [6], которая дает хорошее согласие с экспериментом [7–9].

К недостаткам этой модели авторы [7,8] относят:

- введение инкубационного времени для образования атомарных кластеров, из которых затем развиваются зерна. Значение этого времени определяется предположениями модели, и часто значительно отличается от полученного экспериментально [7];
- вообще не рассматриваются частицы радиусом меньше критического, хотя широко известно, что при определенных условиях функция распределения может целиком лежать в докритической области [1];
- неоправданно разбиение числового диапазона возможных значений радиуса на классы по 0,05 нм (меньше размеров самого атома);
- сравнение с экспериментом показало возможность применения модели Кампманна–Вагнера только в узком температурном диапазоне, когда процессы нуклеации и коалесценции не перекрываются. Кроме того, нерациональным является численное решение в размерных переменных и подгонка модели для каждого материала в отдельности.

Актуальной является задача построения модели, которая будет с единых позиций адекватно описывать развитие фазового перехода, а также позволит исследовать переходные процессы, сопровождающие каждую из стадий, и получить не только количественные характеристики процесса, но и связать промежуточные этапы роста. Полученные результаты позволяют качественно оценить зависимость конечной структуры материала от начальных параметров системы.

§ 1. Описание модели

Рассмотрим пересыщенный раствор, в котором идет процесс нуклеации. Будем считать, что объем образующихся зерен мал по сравнению с объемом сосуда, следовательно, нет конкурирующего роста на границе раздела соседних зерен, процессами переноса зародышей пренебрегаем. При формулировке задачи, для простоты, не будем учитывать анизотропию, принимая форму зародышей сферической, будем считать, что центры кристаллизации возникают случайно и равномерно по всему объему с некоторой интенсивностью.

Особенностью предлагаемой в этой работе модели является оригинальный выбор функции источника в уравнении (2).

Очевидно, что функция источника $I(a, t)$, определяющая скорость образования зародышей, зависит от пересыщения раствора, и с уменьшением пересыщения Δ генерация зародышей уменьшается. Кроме того, минимум работы по образованию зародышей соответствует $a = 0$, т. е. в основном возникают зародыши малых размеров, которые потом начинают расти за счет диффузии из раствора и растворяться. Для простоты можно считать, что большинство вновь

образовавшихся зародышей имеют «нулевой» размер, т. е. $I(a, t)$ пропорциональна δ -функции Дирака. В данной работе принята следующая модель источника:

$$I(a, t) = I_0 \cdot \exp\left(-\frac{\Omega^2}{\Delta(t)^2}\right) \cdot \delta^3(a), \quad (1)$$

где Ω — характерное пересыщение, при котором может происходить генерация зародышей, I_0 — скорость образования зародышей «нулевого» радиуса, параметр системы. При $\Delta_0 \ll \Omega$ (Δ_0 — начальное концентрационное пересыщение) количество зародышей, достигающих до критического размера, мало, результатом конкуренции процессов нуклеации и растворения будет равновесная функция распределения. При $\Delta_0 \gg \Omega$ происходит интенсивное образование зародышей, значительное число которых достигает до критического размера, что приводит к росту новой фазы и в дальнейшем к коалесценции.

Для численного решения целесообразно введение безразмерных переменных (время τ и радиус r). За масштаб радиуса r_0 выберем радиус зародыша, поверхностная энергия которого равна T : $r_0 = (T/8\pi\alpha)^{1/2}$. Подстановка приведенных выражений в (2) и преобразования к безразмерным переменным приводят к уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - f \left(\frac{r}{r_k} - 1 \right) \right) + I_0 \cdot \exp(-\Omega_0^2 x^2(t)) \frac{\delta(r)}{r^2}, \quad (2)$$

где $r_k = (V'c_0)/(4\pi\Delta_0 r_0^3)$ — критический радиус зародыша (соответствует равновесию зерна с окружающим раствором при коалесценции [2], $x(t) = \Delta_0/\Delta(t)$, $x(t=0) = 1$, $\Omega_0 = \Omega/\Delta_0$.

Наконец, сохранение полного количества растворенного вещества выражается уравнением

$$\Delta + q = \Delta_0, \quad (3)$$

где $q = \rho \int \frac{4}{3}\pi a^3 f(a) da^3$ — масса образовавшихся зерен, которая равна нулю в начальный момент времени.

При переходе к безразмерным переменным уравнение (3) приводит к закону сохранения массы в виде

$$1 = \frac{1}{x(t)} + \chi \int r^3 f(r, t) d^3 r, \quad (4)$$

где $\chi = (4\rho\pi r_0^4)/(3\Delta_0)$ — параметр системы, определяющий зависимость от начального пересыщения и, соответственно, скорость фазового перехода.

Выбор функции источника в виде (1) при определении соответствующим образом параметров системы позволяет получить различные пути развития системы (от равновесной функции до коалесценции) и исследовать как квазиравновесные этапы, так и все переходные процессы. Механизм зарождения, роста и коалесценции при фазовом переходе первого рода рассматривается с единых позиций путем численного решения кинетического уравнения (2) с учетом закона сохранения массы (4).

Уравнения решались методом конечных разностей по неявной схеме, которая является устойчивой. Шаг сетки выбран $dr = 0,01$, шаг по времени $d\tau = 0,02$.

Разностная схема для уравнения (2) при $i = 1, 2, \dots, N$

$$A_i f_{i-1}^{n+1} - C_i f_i^{n+1} + B_i f_{i+1}^{n+1} = -F_i, \quad (5)$$

где f_i^n — значение функции в $x_i = i \cdot dr$ в момент времени $t_n = n \cdot d\tau$. Коэффициенты прогонки

$$A_i = \frac{1}{dr^2(i-0.5)} + \frac{dr(i-0.5)}{2r_{kr}} - \frac{1}{2}; \quad (6)$$

$$B_i = \frac{1}{dr^2(i+0.5)} - \frac{dr(i+0.5)}{2r_{kr}} + \frac{1}{2}; \quad (7)$$

$$C_i = \frac{dr^3}{3d\tau}(3i^2 + 0.25) + \frac{1}{dr^2(i + 0.5)} + \frac{1}{dr^2(i - 0.5)} + \frac{dr}{2r_{kr}}; \tag{8}$$

$$F_i = \frac{dr^3(3i^2 + 0.25)}{3d\tau} f_i^n. \tag{9}$$

Разностная схема для уравнения (2) при $i = 0$:

$$f_0^{n+1} \left(\frac{dr^3}{24d\tau} + \frac{2}{dr^2} + \frac{dr}{4r_{kr}} - \frac{1}{2} \right) = f_1^{n+1} \left(\frac{2}{dr^2} - \frac{dr}{4r_{kr}} + \frac{1}{2} \right) + \frac{dr^3}{24d\tau} f_0^n + I_0 \exp(-\Omega_0^2 x^n). \tag{10}$$

Значение x^{n+1} определяется из закона сохранения массы, разностная схема для которого

$$1 = \frac{1}{x^{n+1}} + \chi \sum (i \cdot dr)^3 f_i^{n+1} dr. \tag{11}$$

Граничное условие на правой границе $f_N^n = 0$.

Значение параметров I_0 и Ω_0 в (10) определяет разные пути развития системы.

§ 2. Процесс образования зародышей и начальный рост из раствора

На рис. 3 представлены графики функции распределения по размерам, соответствующие параметрам $I_0 = 0, 1$ и $\Omega_0 = 0, 4$ в моменты времени $t_1 = 5$, $t_2 = 50$ и $t_3 = 200$. Параметры соответствуют высокой скорости образования зародышей: рост из раствора большого количества частиц приводит к быстрому убыванию пересыщения системы и, следовательно, увеличению критического радиуса зародыша ($r_{kr1} = 1, 05$, $r_{kr2} = 4, 8$). В результате лишь малое количество частиц радиуса порядка критического (приграничная область) продолжает развиваться в новую фазу.

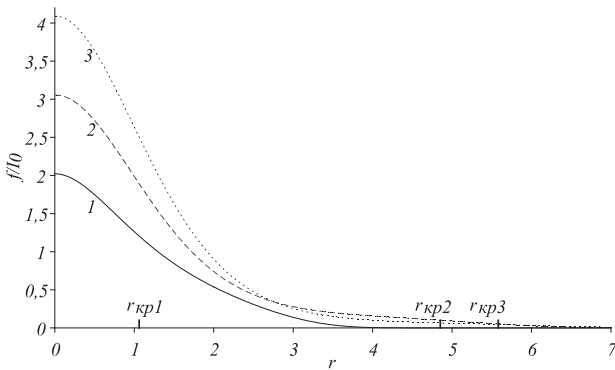


Рис. 3. $I_0 = 0, 1$. Большинство зародышей имеет радиус меньше критического и не развивается в новую фазу. Графики соответствуют времени: $t_1 = 5$, $t_2 = 50$, $t_3 = 200$. Критический радиус: $r_{kr1} = 1, 05$, $r_{kr2} = 4, 8$, $r_{kr3} = 6, 2$

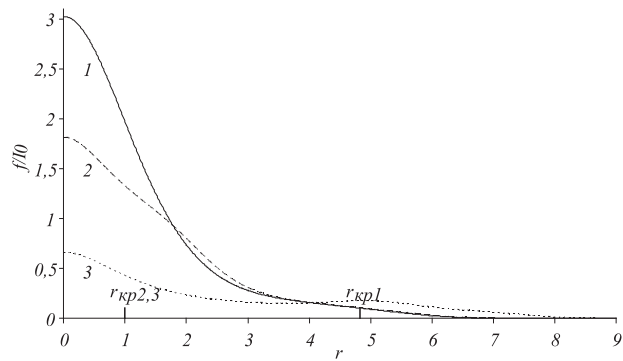


Рис. 4. $I_0 = 0, 1$. После установления равновесной функции распределения ($t_1 = 49$, $r_{kr1} = 4, 82$), дополнительное переохлаждение переводит большое количество зародышей в закритическую область ($r_{kr2,3} = 1$). Графики 2, 3 соответствуют времени $t_2 = 51$, $t_3 = 65$

Далее, возрастающий критический радиус становится больше радиуса всех зародышей (поток через критический радиус стремиться к нулю). Процесс соответствует постоянной конкуренции зарождения и растворения, и интенсивность источника при этом не убывает, т.к. наступает динамическое равновесие: сколько примеси уходит из раствора при образовании новых зародышей, столько и попадает обратно при растворении докритических зародышей, что в конечном итоге приводит к равновесной функции распределения. Максимум функции будет расти, что соответствует образованию все большего количества зародышей малого радиуса (3, рис. 3). Полученное решение соответствует аналитическому решению Зельдовича [1].

Для дальнейшего развития основной массы в новую фазу, очевидно, требуется дополнительное переохлаждение как причина скачкообразного уменьшения критического радиуса. На рис. 4 представлены графики, соответствующие $t_1 = 49$, когда равновесное распределение практически установилось (1, рис. 4), при $t = 50$ вводится внешнее дополнительное переохлаждение, которое приводит к постоянному низкому значению критического радиуса ($r_{kr2,3} = 1$) (2, 3, рис. 4). В этом случае большое количество зародышей оказывается в закритической области и продолжают расти из раствора. Весь процесс завершится коалесценцией с образованием малого количества крупных зерен (максимум функции распределения постоянно убывает).

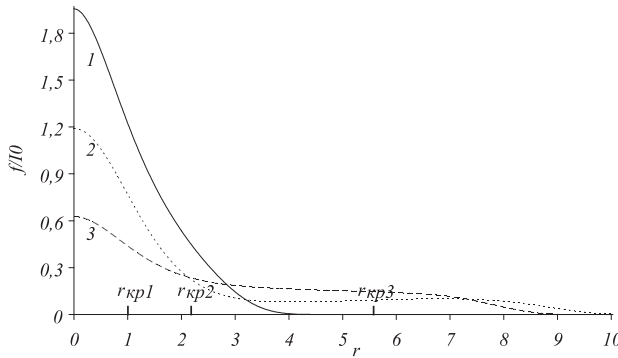


Рис. 5. $I_0 = 0,01$. Рост зародышей из раствора приводит не только к росту критического радиуса, но и уменьшению интенсивности источника. При этом большое количество зародышей дорастает до закритического радиуса. Графики соответствуют времени: $t_1 = 5$, $t_2 = 50$, $t_3 = 100$. Критический радиус: $r_{kr1} = 1$, $r_{kr2} = 2,18$, $r_{kr3} = 5,57$

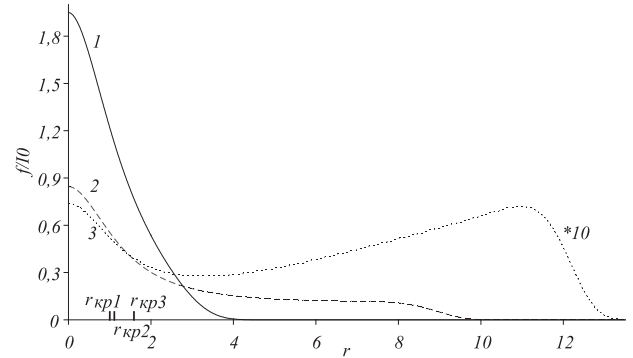


Рис. 6. $I_0 = 0,001$. Большинство зародышей имеет радиус больше критического и развивается в новую фазу. Графики соответствуют времени $t_1 = 5$, $t_2 = 50$, $t_3 = 100$. Критический радиус: $r_{kr1} = 1$, $r_{kr2} = 1,11$, $r_{kr3} = 1,58$

На рис. 5 представлены графики функции распределения по размерам, соответствующие параметрам $I_0 = 0,01$ и $\Omega_0 = 0,4$ в моменты времени $t_1 = 5$, $t_2 = 50$ и $t_3 = 100$. Полученные результаты соответствуют следующему: много зародышей проходит через критический радиус, пересыщение падает, генерация прекращается. Максимум функции распределения начинает убывать (2, 3, рис.5). Большое количество зародышей будут иметь радиус $r > r_{kr}$ и продолжают развиваться в новую фазу. Те, которые окажутся в приграничной области, могут с заметной вероятностью раствориться. И, аналогично первому случаю, зародыши с $r < r_{kr}$ будут растворяться. Но при этом пересыщение раствора также начнет возрастать, и может снова начаться генерация зародышей, что не противоречит реально наблюдаемым процессам.

Изменение функции распределения со временем, полученной при $I_0 = 0,001$ и $\Omega_0 = 0,4$, что соответствует малой интенсивности образования зародышей, представлено на рис.6 при $t_1 = 5$, $t_2 = 50$, $t_3 = 100$. Большинство образовавшихся зерен успеет дорасти до критического размера прежде, чем пересыщение раствора начнет существенно уменьшаться, а критический радиус расти (1, рис.6). Кроме того, критический радиус будет увеличиваться медленнее среднего размера зерна ($r_{kr1} = 1$, $r_{kr2} = 1,11$, $r_{kr3} = 1,58$). Большинство образующихся зародышей в процессе роста выйдет в закритическую область и продолжит рост из раствора(2, 3, рис.6). Дальнейшее развитие будет соответствовать процессу коалесценции, в результате которого образуется малое количество крупных зерен, заполняющих весь объем. Но при этом нуклеация может наблюдаться и после начала процесса коалесценции.

§ 3. Процесс коалесценции

Рассмотрим численное решение системы (2), (4) для случая мгновенного зарождения центров кристаллизации: $I_0 = 0,01$ и $\Omega_0 = 0,4$, но источник работает небольшое время в начале процесса с большой интенсивностью (процесс соответствует бетта-модели Колмогорова [10]). Быстро прекратившаяся генерация зародышей не обедняет раствор, что позволяет образовавшимся зародышам выйти в закритическую область (1, 2, рис. 7)(критический радиус почти не

возрастает: $r_{kr1,2} = 1$, $r_{kr3} = 1,17$). Так как интенсивность в начале процесса была высокая, большое количество образовавшихся устойчивых зародышей при дальнейшем росте быстро обедняет раствор и, когда новая фаза будет в равновесии с раствором, начнется процесс коалесценции (3, рис. 7): новых устойчивых зародышей не образуется, все ранее образовавшиеся зерна имеют макроскопический размер, максимум функции распределения, уменьшаясь, смещается вдоль оси радиуса. Получаемая функция распределения на больших временах соответствует асимптотическому решению Лифшица–Слезова [2]. Описанный процесс наиболее полно охватывает возможности реализации решения уравнений (2), (4): от получения равновесной функции распределения (пока работает источник) и роста до коалесценции.

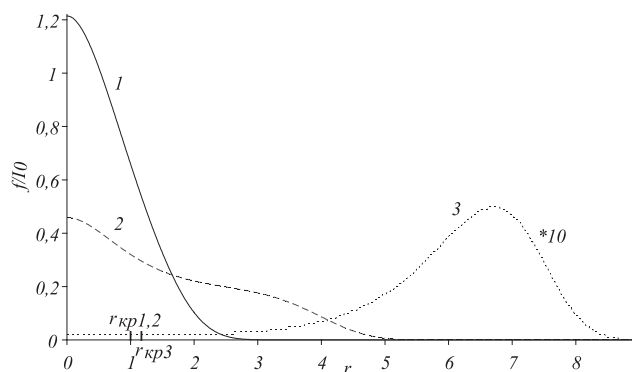


Рис. 7. $I_0 = 0,01$. Большинство зародышей быстро дорастают до закритической области и продолжают увеличиваться за счет переноса вещества от более мелких зародышей. Графики соответствуют времени: $t_1 = 1,25$, $t_2 = 10$, $t_3 = 35$. Критический радиус: $r_{kr1,2} = 1$, $r_{kr3} = 1,17$

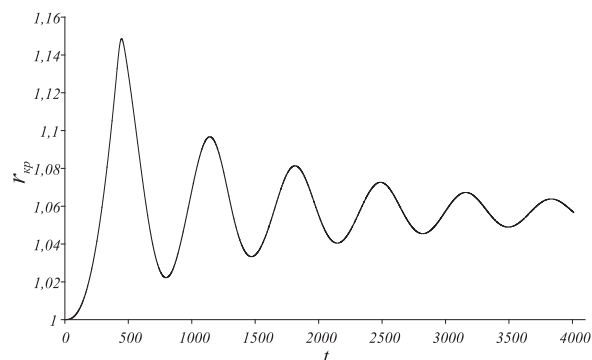


Рис. 8. График зависимости критического радиуса от времени, соответствующий периодическому решению, $I_0 = 0,1$ и $\Omega_0 = 3$

§ 4. Периодическое решение

В ходе численных экспериментов было выявлено периодическое решение: при $I_0 = 0,1$ и $\Omega_0 = 3$. График зависимости критического радиуса от времени представлен на рис.8. Полученный результат соответствует следующему: при низкой интенсивности нуклеации образуются зародыши, которые успевают дорасти до закритических размеров, но скорость генерации при этом быстро убывает. Устойчивые зародыши растут из раствора, обедняя его. Критический радиус начинает увеличиваться, причем скорость роста критического радиуса превышает скорость роста среднего радиуса. К некоторому моменту времени критический радиус достигает максимального значения, при котором практически все устойчивые зародыши становятся докритическими и начинают растворяться, насыщая раствор. Насыщение раствора приводит к тому, что критический радиус начнет убывать, а интенсивность генерации новых зародышей увеличиваться. Система приходит к первоначальному состоянию, время соответствует полному периоду колебаний.

В течение одного периода ненулевой поток через критический радиус (при его максимальном значении) приводит к тому, что не все вещество новой фазы растворяется, остается малое количество зародышей, которые продолжают расти. В следующем периоде раствор будет менее насыщенным, амплитуда колебаний критического радиуса уменьшится.

Данный эффект может наблюдаться на эксперименте в виде периодической структуры вблизи границы.

Заключение

В работе с единых позиций рассмотрен механизм зарождения, роста и коалесценции при фазовом переходе первого рода путем численного решения единого кинетического уравнения, которое позволяет исследовать не только квазиравновесные этапы, но и все переходные процессы. Анализ решения показал, в каких случаях работают предположения, сделанные в работах [1,2]: в зависимости от интенсивности источника I_0 (фактически начального пересыщения

и внешних условий охлаждения) можно получить как равновесную функцию распределения, соответствующую решению Зельдовича [1], так и не зависящее от начального распределения асимптотическое решение для процесса коалесценции, которое соответствует аналитическому решению Лифшица–Слезова [2]. Кроме того, показано, при каких значениях параметров наблюдается периодическое решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Теоретическая физика. Т. 10. Физическая кинетика: учеб. для вузов. — 1-е изд. — М.: Наука, 1979. — 528 с.
2. Лифшиц И. М., Слезов В. В. О кинетике диффузионного распада пересыщенных твердых растворов // ЖЭТФ. — 1958. — Т. 35, вып. 2(8). — С. 479–492.
3. Wagner. С. Theory of Ostwald ripening // Z. Electrochem. — 1961. — Vol. 65. — P. 581.
4. Слезов В. И., Сагалович В. В. Диффузионный распад твердых растворов // УФН. — 1987. — Т. 151. — С. 167.
5. Бренер Е. А., Марченко В. И., Мешков С. В. К кинетике зарождения при фазовых переходах первого рода // ЖЭТФ. — 1983. — Т. 85, вып. 6(12) — С. 2107–2115.
6. Kampmann R. and Wagner R. Phase Transformation in materials // Materials science and technology. — 1991. — Vol. 5. — P. 280.
7. Robson J. D. Modeling the evolution of particle size distribution during nucleation, growth and coarsening // Materials Science and Technology. — 2004. — Vol. 20. — P. 441–448.
8. Robson J. D. Modelling precipitation in zirconium niobium alloys // Journal of Nuclear Materials 2008. — Vol. 377, № 3. — P. 415–422.
9. Dutta B. Modelling the kinetics of strain induced precipitation in Nb microalloyed steels // Acta Materialia. — 2001. — Vol. 49, №. 5 — P. 785–794
10. Бельский В. З. Геометрико-вероятностные модели кристаллизации. — М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 03.03.09

T. B. Ivanova, V. V. Vaskin

Generalized model of kinetics of formation of a new phase

The generalized model of formation of a new phase is considered. The basic stages of process of growth are gathered in a model at phase transition of the first sort. The numerical solution of the kinetic equation of Fokker–Planck is received. Dependence of the solution on parameters of system is investigated. Areas of applicability of assumptions made by Zeldovich, Lifshits and Slezov are revealed. Also it is shown, that depending on parameters of system it is possible to reserve both equilibrium distribution, and automodelling distribution of Lifshits–Slezov. At some values of parameters the equation has the oscillatory solution.

Keywords: phase transition, nucleation, coalescence, Fokker–Planck kinetic equation.

Mathematical Subject Classifications: 80A22

Иванова Татьяна Борисовна,
ст. преподаватель кафедры теоретической физики,
Удмуртский государственный университет,
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, (корп. 4)
E-mail: tbesp@udm.ru

Васькин Владимир Васильевич,
к. ф.-м. н., профессор кафедры теоретической физики,
Удмуртский государственный университет,
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, (корп. 4)
E-mail: vaskin@udsu.ru