МЕХАНИКА 2009. Вып. 2

УДК 531.01

© *Г. М. Розенблат*

К ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ В ДИНАМИКЕ НЕСВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ПАРАДОКСЫ ПЭНЛЕВЕ

В статье рассмотрены основные принципы постановок задач в механике твердого тела при наличии связей (с сухим трением и без). Основное внимание уделено предыстории начальных условий задачи, которая должна быть корректно определена таким образом, чтобы не требовалось введения дополнительных гипотез и допущений, выводящих исследование за рамки динамики твердого тела без ударов. Тогда динамика движения (и/или равновесия) твердых тел может быть описана однозначно и без каких-либо парадоксальных ситуаций (парадоксов Пэнлеве). Эта методика иллюстрируется на трех известных задачах механики: опирание твердого тела на одну точку при наличии сухого трения, движение стержня с ползунами в направляющих с сухим трением, опирание твердого тела на две точки с сухим трением («скамейка»).

Ключевые слова: система со связями, сухое трение, парадоксы Пэнлеве

«... Пэнлеве не прав, называя Кулоновы законы «logiquement inadmissibles» (логически недопустимыми), он однако, прав, утверждая, что эти законы в пределах механики твердого тела с чисто логической точки зрения *нуждаются в дополнении*».
Р. Мизес [1]

§ 1. Основные принципы

Все системы материальных точек разделяются на два класса:

а) системы *свободных* точек, взаимодействующих между собой и другими точками;

б) системы *несвободных* (связанных) точек, взаимодействующих между собой и другими точками (системы со связями).

Для систем класса а) постановка задач динамики заключается в следующем: для произвольно заданных начальных условий при $t = 0$ (положений и скоростей точек) определить последующее движение, то есть положения и скорости точек при $t > 0$. Эта задача сводится к задаче Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и при «приемлемом» аналитическом описании сил взаимодействия имеет однозначное аналитическое решение. Здесь, однако, возможны затруднения, связанные с соударением точек (то есть совпадение координат каких-либо S $(S \geqslant 2)$ точек). Эти затруднения снимаются соответствующими гипотезами и теоремами классической теории удара, которые, конечно, имеют ограниченную область применимости.

Для систем класса б) затруднения появляются сразу и касаются они *способа выбора начальных условий.* Это вызвано тем, что связи в механике допускают двойственное толкование и определение. С одной стороны, они являются некоторыми функциональными зависимостями между координатами (и, возможно, временем и скоростями) точек. Это удобный формально-математический метод, который приводит к понятию обобщенных координат и уравнениям Лагранжа (Гиббса–Аппеля и т. п. для неголономной механики).

С другой стороны, по аксиоме связей последние реализуются соответствующими силами (силами реакций), которые призваны обеспечивать выполнение указанных функциональных зависимостей, и, кроме того, (и это самое важное!) эти силы реакций должны удовлетворять определенным условиям, которые следуют из физической и механической сущностей рассматриваемой задачи. Например, если мы считаем тела, взаимодействующие (контактирующие) между собой, абсолютно твердыми, то силы реакции, реализующие эти связи, могут быть, вообще говоря, как угодно большими. Если мы допускаем односторонность связи (функциональная зависимость в виде неравенства), то реакция направлена всегда в сторону схода связи (адгезия исключается).

Отметим, что мы здесь не касаемся вопроса о реализации связей, который рассматривался в работах [2].

Рассмотрим вначале связи класса б$_1$): удерживающие (двухсторонние) идеальные связи (связи без трения). В этом случае начальные условия задаются так, что выполнены уравнения связей, или, если мы перейдем к обобщенным координатам, задаются (при $t = 0$) начальные значения обобщенных координат и скоростей. Тогда обобщенные координаты как функции времени и начальных условий определяются из уравнений Лагранжа, которые, так же как и задача Коши для систем класса а), однозначно (как правило) разрешимы. Заметим, что уже здесь мы предполагаем, что движение системы при $t < 0$ было или состоянием покоя, или движением по связи. В любом из этих двух случаев мы должны указать *источники*, приводящие при $t > 0$ к изменению состояния системы, которое было при $t < 0$. В частности, если при $t < 0$ система покоилась и при $t \geqslant 0$ ничего не меняется (силы и другие геометрические и механические параметры системы), то покой будет сохраняться и при $t \geqslant 0$. Если же при $t < 0$ было движение по связи и мы хотим знать, какое движение будет при $t > 0$, то при $t = 0$ мы должны брать такие начальные условия, которые являются *результатом некоторого движения по связи,* реально существовавшего в «прошлом», то есть при $t < 0$!

Если же для каких-то начальных условий мы не можем подобрать (указать) такое движение в «прошлом», то прежде чем решать эту задачу при $t > 0$, нам следует сначала разобраться с тем, как и каким образом система могла очутиться в таких начальных условиях (например, это мог быть «заход» системы на связь, что реализуется для односторонних при $t < 0$ связей, которые при $t \geqslant 0$ сразу становятся двухсторонними).

В любом случае, чтобы решать задачу дальше (при $t > 0$) с этими нестандартными («парадоксальными») начальными условиями, нам следует запастись некоторым набором допущений (гипотез), которые будут приемлемо и правдоподобно описывать такой, вообще говоря, ударный процесс.

Заметим, что сам Пэнлеве, отвечая на критику своих оппонентов, очень подробно описывает способы, которыми можно было бы реализовать такие «парадоксальные» начальные условия. Иногда эти способы являются достаточно искусственными и хитроумными, усложняющими исходную постановку задачи и механическую модель. Кроме того, и здесь требуется введение новых (дополнительных) гипотез и допущений.

Используя последнее рассуждение, мы можем рассмотреть принципы задания начальных условий для связей класса б$_2$): идеальные связи с трением. В этом случае силы трения создают ненулевую работу на возможных перемещениях системы, и поэтому для использования метода обобщенных координат Лагранжа силы трения включают в число внешних или внутренних (активных) сил. Связи остаются идеальными, однако введенные силы трения зависят как от сил (нормальных) реакций связей, так и, вообще говоря, от кинематического состояния системы в данный момент. Отсюда следует, что выбор начальных условий в данной задаче для ее последующего (при $t > 0$) решения сопряжен с еще большими осложнениями, чем для систем класса б$_1$). Более того, если силы трения являются кулоновыми (сухими), то обращение в нуль скорости соответствующего фрикционного контакта приводит к неопределенности, связанной с возникновением силы трения покоя, и, как следствие, к эффекту «заклинивания» и (или) «зонам застоя».

Выходом из создавшейся ситуации является более аккуратный выбор начальных условий, связанный с требованием того, чтобы они (эти начальные условия) являлись *результатом некоторого предыдущего реального движения системы по связи и силами реакций, совме-*

стимыми с физической сущностью этих связей. Если начальные условия (по тем или иным причинам) не удовлетворяют указанному требованию, то следует уточнить (расширить) постановку задачи (например, приняв какие-либо допущения теории удара с трением и т.п.). По сути, здесь речь идет о более четкой и точной постановке задачи, рассматривающей процесс движения *диалектически,* как переход от «прошлого» ($t<0$) к «настоящему» ($t=0$) и затем в «будущее» ($t>0$)!

Отметим еще следующее обстоятельство. Системы с трением из-за разрывного характера силы сухого трения являются, вообще говоря системами с запаздыванием (может быть, малым). Этот факт и приводит к необходимости получения информации о поведении системы в ближайшем «прошлом», то есть при $t<0$. Можно привести несколько примеров:

1) начало движения автомобиля в момент трогания из состояния покоя или состояния небольшого движения («раскачка»);

2) движение автомобиля в момент переключения направления его движения с прямого на обратное (в этот момент скорость его равна нулю);

3) буксировка автомобиля с помощью троса (ударная или безударная) и так далее.

Заметим, кроме того , что автомобиль, колесный экипаж («робот») и колесная пара (колесо, в частности) являются яркими и практическими примерами рассматриваемых задач с сухим трением.

Обсудим еще часто рассматриваемые в литературе так называемые «нулевые начальные скорости». Если при $t=0$ скорости всех точек системы равны нулю, то мы должны выяснить *как* это произошло, то есть что было при $t<0$?! Если был покой, и значит нормальные силы реакции, силы трения покоя, другие активные силы и параметры системы удовлетворяли условиям равновесия, то ясно, что покой останется и при $t>0$ (конечно, если нет источников для изменения сил или других параметров системы). Таким образом, как при $t<0$, так и при $t\geqslant 0$ ускорения точек остаются также нулевыми.

Если же при таких начальных условиях существует еще одно (новое дополнительное) решение при $t\geqslant 0$ с ненулевыми (конечными) ускорениями при тех же активных силах, но с другими нормальными реакциями и силами трения (уже не покоя, а, вообще говоря, скольжения!), то это означает *только одно:* система при $t<0$ была в движении, которое при $t=0$ пришло в состояние (вообще говоря) *мгновенного* покоя. Если такое исходное решение по связи реально существует, то именно оно может перейти при $t>0$ в это новое решение. Если же удается показать, что такого исходного решения по связи не существует, то это новое (дополнительное) решение следует отбросить и полагать, что при $t>0$ система будет покоиться. Однако, возможно, что существует исходное движение *нового типа* (например, «заход» на связь, «мягкий» или «жесткий»), которое может быть продолжено рассматриваемым дополнительным решением. Такая ситуация требует введение дополнительных гипотез и допущений, усложняя исходную постановку задачи о безотрывных движениях системы по связи.

Отметим, что «нулевые» скорости *всех* точек системы для *реальных движений* являются, вообще говоря, труднореализуемыми и маловероятными (уникальными) обстоятельствами. Однако для состояния равновесия, то есть при отсутствии движения, «нулевые» скорости являются *обязательным* свойством системы!

Далее мы приводим некоторые примеры, иллюстрирующие изложенные принципы.

§ 2. Плоское твердое тело, контактирующее с шероховатой плоскостью одной своей точкой

Рассматривается задача о равновесии плоского твердого тела, опирающегося одной точкой о шероховатую плоскость с коэффициентом трения f. Пусть O — точка контакта, в которой реализуется *односторонняя* связь, C — центр масс тела, Oxy — система координат, причем Ox — по опорной плоскости, Oy — по перпендикуляру к ней в сторону тела, $\overrightarrow{N}$ — нормальная реакция плоскости, причем $N_x=0$, $N_y>0$, $\overline{F}_f$ — сила трения (покоя или скольжения).

Пусть при $t=0$ все скорости точек тела равны нулю, а приложенная плоская система активных сил удовлетворяет условиям статического равновесия. Это означает, что система приводится к одной силе $\overline{F} = (F_x, F_y)^T$, приложенной в точке контакта O и лежащей внутри конуса трения, то есть выполнены условия

$$F_x + F_f = 0, \quad F_y + N_y = 0, \quad N_y > 0, \quad \left|\frac{F_f}{N}\right| \leqslant f.$$

Из этих уравнений и неравенств мы получаем следующие условия статического равновесия:

$$\left|\frac{F_x}{F_y}\right| \leqslant f, \quad F_y < 0. \tag{2.1}$$

Поставим задачу выяснить, какое движение тела будет при $t > 0$? Таким образом, мы хотим определить, будет ли при $t > 0$ и выполнении условий (2.1) покой или возможно какое-либо движение по связи. По терминологии Желле [8] условия (2.1) являются условиями «возможного» равновесия, а мы хотим установить, является ли оно также и «обязательным».

Основной результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Если:*

а) *при* $t = 0$ *скорости всех точек тела равны нулю;*

б) *выполнены неравенства* (2.1)*;*

в) *при* $t < 0$ *движение тела было каким-либо безотрывным движением по связи,*

то при $t > 0$ *тело будет находиться в состоянии равновесия* (*может быть, неустойчивого*).

Замечание 1. Условие в) теоремы означает, что рассматриваемые начальные условия являются результатом некоторого исходного (безотрывного) движения по связи.

Замечание 2. При невыполнении условия в) исходная задача, вообще говоря, усложняется, а для ее решения требуются дополнительные допущения и гипотезы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство теоремы осуществляется перебором различных случаев безотрывных движений (как при $t < 0$, так и при $t > 0$) и непосредственной проверкой и реализуемости. Сначала рассмотрим, что может быть при $t > 0$. Обозначим (x_c, y_c) — координаты центра масс C, причем без ограничения общности, будем считать $x_c \geqslant 0$, $y_c \geqslant 0$; ρ — центральный радиус инерции тела; $m = 1$ — масса тела.

1. Точка O не скользит, то есть $\overline{a_0} = 0$, но $\varepsilon \neq 0$ — угловое ускорение тела. Применяя теорему моментов относительно точки O (с учетом того, что скорость центра масс C равна 0), получим

$$(\rho^2 + x_c^2 + y_c^2)\,\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 0.$$

Это противоречие, то есть такого движения быть не может.

2. Точка O скользит, то есть $\overline{a_0} \neq 0$, причем $a_{0y} = 0$ (нет отрыва), $a_{0x} \neq 0$. Принимая за ε угловое ускорение тела, запишем уравнения динамики (при нулевых скоростях!):

$$\begin{gathered} a_{0x} - \varepsilon y_c = F_x - fN\sigma, \\ \varepsilon x_c = F_y + N, \\ (\rho^2 + x_c^2 + y_c^2)\,\varepsilon - a_{0x} y_c = 0; \\ N = N_y > 0, \quad \sigma = \operatorname{sgn} a_{0x}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Третье уравнение из (2.2) есть уравнение кинетического момента относительно точки O, записанное с учетом того, что скорость точки C равна нулю.

Решение системы (2.2) имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{\Delta}\Big(F_x + f\sigma F_y\Big), \\ N &= \frac{1}{\Delta}\left(x_c F_x - \frac{\rho^2 + x_c^2}{y_c}\, F_y\right), \\ a_{0x} &= \frac{\rho^2 + x_c^2 + y_c^2}{y_c}\,\varepsilon, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $\Delta = \dfrac{\rho^2 + x_c^2 + f\sigma x_c y_c}{y_c}$, $\sigma = \operatorname{sgn} a_{0x} = \operatorname{sgn} \varepsilon$. Перебирая два варианта для σ $(\sigma = +1$ или $\sigma = -1)$, мы получим следующий результат (см. [6]). Если выполнены неравенства

$$0 < \frac{\rho^2 + x_c^2}{x_c y_c} < f, \quad -f < \frac{F_x}{|F_y|} < -\frac{\rho^2 + x_c^2}{x_c y_c} < 0, \tag{2.4}$$

то из состояния с нулевыми скоростями (при $t = 0$) возможно (при $t > 0$) движение с ненулевыми и конечными ускорениями точек тела, а именно, со скольжением точки контакта O влево ($a_{0x} < 0$) и поворотом тела по часовой стрелке ($\varepsilon < 0$). Ясно, что других движений (при $t > 0$), кроме покоя, быть не может.

Положим теперь, что (2.4) (а также и (2.1)) выполнены, и рассмотрим различные виды *исходных* (при $t < 0$) движений по связи, в результате которых тело могло прийти в рассматриваемое состояние с «нулевыми» скоростями.

Возможны 4 типа таких исходных движений:

1) движение со скольжением точки O вправо ($v_{0x} = 0$, $\dot v_{0x} = a_{0x} < 0$);

2) движение со скольжением точки O влево ($v_{0x} = 0$, $\dot v_{0x} = a_{0x} > 0$);

3) движение чистого качения ($v_{0x} = 0$, $\dot v_{0x} = a_{0x} = 0$);

4) состояние чистого покоя (равновесие).

Отметим, что во всех этих движениях предполагается безотрывность, то есть положительность нормальной реакции, а все функции и их производные рассматриваются в момент $t = -0$.

Покажем, что движение 1) не реализуется. Действительно, выписывая для этого случая при $t < 0$ уравнение динамики, мы получим, по аналогии с (2.3), следующие решения:

$$\begin{aligned} N &= \frac{F_x(x_c y_c) - F_y(\rho^2 + x_c^2)}{\rho^2 + x_c^2 + f x_c y_c}, \\ a_{0x} = \dot v_{0x} &= \frac{\rho^2 + x_c^2 + y_c^2}{\rho^2 + x_c^2 + f x_c y_c}(F_x + f F_y). \end{aligned}$$

В силу неравенств (2.1) и (2.4) имеем

$$F_x(x_c y_c) - F_y(\rho^2 + x_c^2) = |F_y|\left(\rho^2 + x_c^2 + \frac{F_x}{|F_y|} x_c y_c\right) < 0,$$

следовательно, $N < 0$.

Аналогично покажем, что не реализуется движение 2). Для него имеем

$$\begin{aligned} N &= \frac{F_x(x_c y_c) - F_y(\rho^2 + x_c^2)}{\rho^2 + x_c^2 - f x_c y_c} \\ a_{0x} = \dot v_{0x} &= \frac{\rho^2 + x_c^2 + y_c^2}{\rho^2 + x_c^2 - f x_c y_c}(F_x - f F_y). \end{aligned}$$

В силу неравенств (2.1) и (2.4) здесь мы получим $a_{0x} < 0$. Но для рассматриваемого движения должно быть $a_{0x} > 0$, то есть противоречие.

Для исходного движения 3) мы получим, применяя теорему моментов относительно точки O, $\varepsilon = 0$, то есть помимо скоростей в рассматриваемом состоянии обнуляются также и ускорения всех точек тела. Тогда будем иметь состояние равновесия (может быть, и неустойчивого), а дальнейшее исследование движения требует дополнительной информации о силах F_x, F_y и параметрах тела.

Таким образом, справедливость теоремы при выполнении неравенств (2.4) установлена. Если условия (2.4) нарушаются, то исчезает дополнительное (при $t > 0$) движение, то есть при $t > 0$ может быть только покой. Зато появляются дополнительные безотрывные исходные движения по связи (при $t < 0$), которые при $t \geqslant 0$ завершаются состоянием покоя (остановка тела). Рассмотрение соответствующих исходных движений здесь аналогично уже рассмотренным случаям, и мы его опускаем.

Таким образом, теорема полностью доказана. □

Аналогичная задача о движении при произвольных начальных условиях и произвольной плоской системе активных сил рассматривалась в работе [3].

§ 3. Задача Пэнлеве–Аппеля ([1, 4])

Цитируем постановку задачи: «...Рассмотрим две материальные точки M и M_1 массы 1, связанные невесомым твердым стержнем MM_1 длины r. Точка M скользит с трением по неподвижной горизонтальной прямой Ox, с которой она не может сойти, и система MM_1 движется в вертикальной плоскости xOy, проходящей через Ox. Найти движение, предполагая, что система находится под действием только силы тяжести ...» [4, с. 117, Т. 1].

Пусть f — коэффициент трения, $\overrightarrow{N}$ — нормальная реакция связи, которая направлена параллельно оси Oy и может иметь любой знак (в силу двухсторонности связи), $\overline{F}_f$ — сила трения, направленная вдоль оси Ox, x — абсцисса точки M, θ — угол между стержнем MM_1 и осью Ox, система координат Oxy выбрана так, что ось Oy направлена вертикально вниз, а ось Ox — по связи.

Составим уравнения динамики:

$$2\ddot{x} + r(\cos\theta)^{\cdot\cdot} = F_f, \quad r(\sin\theta)^{\cdot\cdot} = 2g + N, \tag{3.1}$$

$$\frac{r^2}{2}\,\ddot{\theta} = \frac{r}{2}(F_f\sin\theta - N\cos\theta). \tag{3.2}$$

Так как связь удерживающая, то мы не накладываем ограничений на знак N, для силы сухого трения F_f принимаем формулу

$$F_f = -fN\sigma, \quad \sigma = \operatorname{sgn}(\dot{x}N), \quad \dot{x} \neq 0, \quad N \neq 0. \tag{3.3}$$

Решая уравнения (3.1) — (3.3) относительно N, $\ddot{\theta}$, $\ddot{x}$, мы получим (так же, как и у Аппеля)

$$\begin{gathered} DN = -(2g + r\dot{\theta}^2\sin\theta), \\ Dr\ddot{\theta} = (2g + r\dot{\theta}^2\sin\theta)(\cos\theta + \sigma f\sin\theta), \\ D\ddot{x} = r\dot{\theta}^2(\cos\theta + \sigma f\sin\theta) + g\big(\cos\theta\sin\theta + \sigma f(1 + \sin^2\theta)\big), \end{gathered} \tag{3.4}$$

где $D = 1 + \cos^2\theta + \sigma f\sin\theta\cos\theta$.

«Парадоксальные» начальные условия, описанные Аппелем, получатся тогда, когда при $t = 0$ выполняется неравенство

$$D_0 = 1 + \cos^2\theta_0 - f\sin\theta_0\cos\theta_0 < 0, \tag{3.5}$$

предполагая, что $\theta_0 \in (0, \pi)$ из первого уравнения системы (3.4) имеем

$$N(0)\Big(1 + \cos^2\theta_0 + f\sin\theta_0\cos\theta_0\operatorname{sgn}\big(\dot{x}(0)N(0)\big)\Big) < 0. \tag{3.6}$$

1. Пусть $\dot{x}_0 > 0$. Тогда если $N(0) > 0$, то из (3.6) получим $N(0) < 0$ — противоречие. Если $N(0) < 0$, то из (3.6) с учетом (3.5) получаем $N(0) > 0$, — опять противоречие!

2. Пусть $\dot{x}_0 < 0$. Тогда система (3.4) имеет непротиворечивое решение, как при $N(0) < 0$, так и при $N(0) > 0$, то есть два решения (неоднозначность).

На основании приведенных рассуждений делается вывод либо об отсутствии движения (для $t > 0$) при выполнении (3.5) и $\dot{x}(0) > 0$, либо о двузначности движения (для $t > 0$) при выполнении (3.5) и $\dot{x}(0) < 0$. Однако исследование исходных (при $t < 0$) движений, которое могли бы привести систему в рассмотренные начальные условия, приводит к следующему результату.

Теорема 2. а) *Если для определенных начальных условий выполнено неравенство* (3.5) *и* $\dot{x}(0) > 0$, *то в рамках рассматриваемых связей эти начальные условия нереализуемы, то есть они не являются результатом никакого «прошлого»* (*исходного*) *движения и соответственно не продолжаются в «будущее»* (*при* $t > 0$). *Для решения задачи с такими условиями необходимы дополнительные предположения* (*гипотезы удара, упругость связей и тому подобное*).

б) *Если для определенных начальных условий выполнено неравенство* (3.5) *и* $\dot{x}(0) < 0$, *то в рамках рассматриваемых* (*двухсторонних*) *связей эти начальные условия реализуются двумя способами: к ним можно прийти, скользя с трением точкой* M *либо по верхней, либо по нижней границе рассматриваемой связи. Соответственно этому «прошлому»* (*исходному*) *движению осуществляется продолжение решения в «будущее»* (*при* $t > 0$), *то есть со скольжением точки* M *либо по верхней, либо по нижней границе связи.*

в) *Если неравенство* (3.5) *не выполнено, то есть* $D_0 > 0$, *то в силу* (3.4) *всегда* (*при* $\theta_0 \in (0, \pi)$) *будет* $N < 0$, *то есть движение происходит так, что точка* M *скользит по нижней границе связи. Здесь при* $\dot{x}(0) \neq 0$ *движение* (*при* $t > 0$) *происходит однозначно и никаких «парадоксальных» ситуаций не возникает.*

г) *Если* $\dot{x}(0) = 0$, *то рассмотрение всех ситуаций также возможно, однако это достаточно громоздко и осуществляется совершенно так же, как это сделано в статье* [3].

Доказательство теоремы устанавливается непосредственной проверкой и здесь опускается (осуществляется так же, как и в статье [3]).

Отметим, что результаты сформулированной теоремы были частично указаны в критических статьях Лекорню, Де Спарра, Клейна и Прандтля (см. [1]). Однако не было сформулировано требование о корректности начальных условий, которые должны являться результатом какого-либо реального исходного движения по связи. В противоположность этому Пэнлеве, отвечая на такую критику, предлагал различного рода хитроумные способы осуществления «парадоксальных» начальных условий (введение гибких и упругих нитей, дополнительных сил, которые потом внезапно исчезают и т.п.). Ясно, что эти способы только затушевывают исходную, *естественную* постановку задачи о равновесии или движении твердого тела.

В заключении, приведем высказывание П. Аппеля то поводу рассмотренного примера: «...Различные авторы пытались устранить эти противоречия, допуская, что связи имеют зазор и принимая в расчет упругость. Но когда f достаточно велико, движения, полученные при разных начальных условиях, могут как раз зависеть от предположений, сделанных о характере связей, и от зазора, которым они обладают, в то время как при f достаточно малом этой трудности не возникает ...» [4, с. 120].

Можно согласиться с этим высказыванием в том, что касается упругости. Однако зазор в двухсторонней связи — совершенно естественное предположение, так как трудно представить себе механическое устройство, которое в совершенной точности реализует связь в виде равенства. Кроме того, все приведенные рассуждения для этого примера нетрудно перенести также и на тот случай, когда связь в точке M является односторонней.

§ 4. Твердое тело, опирающееся о шероховатую плоскость двумя своими точками («скамейка», см. [5])

Рассмотрим задачу о равновесии (и возможном движении) твердого тела типа «скамейки», которое опирается точками A и B о шероховатую горизонтальную плоскость с коэффициентом трения f. На тело действует сила тяжести, приложенная в его центре масс G и произвольная плоская система сил, расположенная в опорной плоскости.

Выберем прямоугольную систему координат $Axyz$ с началом в точке опоры A, причем Ax направлена по отрезку AB, длина которого $AB = 2l$, а ось Az — против силы тяжести $\overrightarrow{g}$. Таким образом, плоскость Axy является опорной плоскостью. Пусть центр масс G имеет координаты

$$x_G = l_1, \quad y_G = 0, \quad z_G = h > 0, \quad \big(l_1 \in (0, 2l)\big).$$

Используя обозначения статьи [6], примем, что проекции главного вектора приложенной плоской системы сил на оси x и y суть: Q_1, Q_2, а $Q_3 = \dfrac{M_c}{l}$, где M_c — главный момент этой системы сил относительно точки C — середины отрезка AB.

Пусть в рассматриваемый момент времени $t = 0$ скорости всех точек тела равны нулю. Требуется определить движение тела при $t > 0$, в частности установить условия его равновесия.

Обозначим через $\overline{N}_A$, $\overline{N}_B$ — нормальные реакции, $\overline{F}_A$, $\overline{F}_B$ — силы трения в точках A и B соответственно, причем $\overline{N}_A$, $\overline{N}_B$ параллельны оси Az, $\overline{F}_A$, $\overline{F}_B$ лежат в опорной плоскости Axy.

Рассматриваем *безотрывные* движения тела и полагаем $N_A = N_{Az} > 0$, $N_B = N_{Bz} > 0$, а силы сухого трения в точках A и B подчиняются обычным соотношениям Кулона для сил трения покоя или скольжения. В дальнейшем используем термин «нулевое состояние» для начальных условий с нулевыми скоростями всех точек тела.

Пусть $m = 1$ — масса тела, а матрица тензора инерции тела в осях $G_{x'y'z'}$ (параллельных соответствующим осям $Axyz$) является диагональной:

$$J = \operatorname{diag}\{J_x, J_y, J_z\}.$$

Рассмотрим какое-либо начальное безотрывное движение тела из нулевого состояния. Обозначаем w_1, w_2 — проекции ускорений точек A, B соответственно на ось Ay, w_3 — общую проекцию ускорений точек A, B на ось Ax (общую, так как длина отрезка AB не меняется), $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)^T$ — вектор углового ускорения тела в системе $Axyz$. В силу теорем кинематики твердого тела и безотрывности движения имеем соотношения

$$\varepsilon_y = 0, \quad \varepsilon_z = \frac{w_2 - w_1}{2l}.$$

Тогда для ускорения центра масс G получим

$$a_{Gx} = w_3, \quad a_{Gy} = w_1 + \frac{l_1}{2l}(w_2 - w_1) - \varepsilon_x h, \quad a_{Gz} = 0,$$

уравнения для движения центра масс G имеют вид

$$\begin{gathered} w_3 = F_{Ax} + F_{Bx} + Q_1, \\ w_1 + \frac{l_1}{2l}(w_2 - w_1) - \varepsilon_x h = F_{Ay} + F_{By} + Q_2, \\ 0 = N_A + N_B - g. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Учитывая, что скорость центра масс G равна нулю, запишем три уравнения об изменении кинетического момента в системе координат $Cx''y''z''$ (оси x'', y'', z'' параллельны осям x, y, z), C — середина отрезка AB:

$$\begin{gathered} J_x\varepsilon_x - \left(w_1 + \frac{l_1}{2l}\Big(w_2 - w_1\Big) - \varepsilon_x h\right) h = 0, \\ hw_3 = (N_A - N_B)l + g(l_1 - l), \\ J_z\frac{w_2 - w_1}{2l^2} + a_{Gy}\frac{l_1 - l}{l} = F_{By} - F_{Ay} + Q_3. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Кроме того, в (4.1) и (4.2) мы полагаем для сил трения:

$$\begin{aligned}
&F_{Ax} = -fN_A\frac{w_3}{\sqrt{w_1^2+w_3^2}}, \\
&F_{Ay} = -fN_A\frac{w_1}{\sqrt{w_1^2+w_3^2}}, && \text{при } w_1^2+w_3^2 \neq 0, \\
&F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2 \leqslant f^2N_A^2, && \text{при } w_1^2+w_3^2 = 0, \\
&F_{Bx} = -fN_B\frac{w_3}{\sqrt{w_2^2+w_3^2}}, \\
&F_{By} = -fN_B\frac{w_2}{\sqrt{w_2^2+w_3^2}}, && \text{при } w_2^2+w_3^2 \neq 0, \\
&F_{Bx}^2 + F_{By}^2 \leqslant f^2N_B^2, && \text{при } w_2^2+w_3^2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Определим сначала «зону застоя», то есть условия статического равновесия. Задача здесь следующая: каким условиям должны удовлетворять Q_j $(j=\overline{1,3})$, чтобы уравнения (4.1), (4.2) и соотношения (4.3) имели решение для неизвестных F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Bx}, F_{By}, N_A, N_B при $w_j = 0$ $(j=\overline{1,3})$, $\varepsilon_x = 0$.

При указанных условиях имеем из (4.1) и (4.2) следующие равенства:

$$N_A = \frac{g}{2}\frac{2l-l_1}{l}, \quad N_B = \frac{g}{2}\frac{l_1}{l},$$
$$F_{Ay} = \frac{1}{2}(Q_3-Q_2), \quad F_{By} = -\frac{1}{2}(Q_2+Q_3),$$
$$F_{Bx} = -Q_1 - F_{Ax}.$$

Используя полученные соотношения и неравенства из (4.3) для сил трения покоя, получим

$$-\sqrt{f^2N_A^2 - \frac{1}{4}(Q_3-Q_2)^2} \leqslant F_{Ax} \leqslant \sqrt{f^2N_A^2 - \frac{1}{4}(Q_3-Q_2)^2},$$
$$-Q_1 - \sqrt{f^2N_B^2 - \frac{1}{4}(Q_2+Q_3)^2} \leqslant F_{Ax} \leqslant -Q_1 + \sqrt{f^2N_B^2 - \frac{1}{4}(Q_2+Q_3)^2}.$$

Для того чтобы полученные интервалы для изменения F_{Ax} имели непустое пересечение, необходимо и достаточно выполнения двух неравенств:

$$-Q_1 - \sqrt{f^2N_B^2 - \frac{1}{4}(Q_2+Q_3)^2} \leqslant \sqrt{f^2N_A^2 - \frac{1}{4}(Q_3-Q_2)^2},$$
$$-\sqrt{f^2N_A^2 - \frac{1}{4}(Q_3-Q_2)^2} \leqslant -Q_1 + \sqrt{f^2N_B^2 - \frac{1}{4}(Q_2+Q_3)^2},$$

которые эквивалентны следующему неравенству:

$$|Q_1| \leqslant \sqrt{f^2N_A^2 - \frac{1}{4}(Q_3-Q_2)^2} + \sqrt{f^2N_B^2 - \frac{1}{4}(Q_2+Q_3)^2}. \tag{4.4}$$

Неравенство (4.4) совместно с очевидными неравенствами:

$$|Q_3 - Q_2| \leqslant 2fN_A, \quad |Q_2+Q_3| \leqslant 2fN_B \tag{4.5}$$

и определяют «зону застоя». В соотношениях (4.4), (4.5) мы полагаем

$$N_A = \frac{g}{2}\frac{2l-l_1}{l}, \quad N_B = \frac{g}{2}\frac{l_1}{l}.$$

Знак равенства в (4.4) определяет границу «зоны застоя» в пространстве параметров $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$. *Отметим, что полученное соотношение не совпадает с границей «области застоя», приведенной в работе* [6], где эта граница дается уравнением

$$|Q_3| = \sqrt{f^2N_A^2 - Q_1^2} + \sqrt{f^2N_B^2 - Q_2^2}.$$

Далее будем решать динамические уравнения (4.1) и (4.2) при условиях (4.3) в предположении, что скользят обе точки A и B, то есть

$$w_1^2 + w_3^3 \neq 0, \quad w_2^2 + w_3^2 \neq 0.$$

Тогда уравнения (4.1), (4.2) с условиями (4.3) представляют собой 10 уравнений для определения 10 неизвестных $\{w_1,\ w_2,\ w_3,\ \varepsilon_x,\ N_A,\ N_B,\ F_{Ax},\ F_{Ay},\ F_{Bx},\ F_{By}\}$, причем должны соблюдаться условия $N_A > 0$, $N_B > 0$.

Введем новые переменные u_1, u_2, α_1, α_2 по формулам

$$w_1 = u_1 \sin\alpha_1, \quad w_2 = u_2 \sin\alpha_2, \quad w_3 = u_1\cos\alpha_1 = u_2\cos\alpha_2.$$

Тогда получим следующие равенства:

$$\begin{gathered}
u_1\cos\alpha_1 + fN_A\cos\alpha_1 + fN_B\cos\alpha_2 = Q_1,\\
\sin\alpha_1\left(\varepsilon_1 u_1\left(1 - \frac{l_1}{2l}\right) + fN_A\right) + \sin\alpha_2\left(\varepsilon_1 u_2\frac{l_1}{2l} + fN_B\right) = Q_2,\\
\sin\alpha_1\left(-\varepsilon_2\frac{1}{2}u_1 - fN_A\frac{l_1}{l}\right) + \sin\alpha_2\left(\varepsilon_2\frac{1}{2}u_2 + fN_B\frac{2l - l_1}{l}\right) = Q_3 - Q_2\frac{l_1 - l}{l},\\
u_1\cos\alpha_1 = u_2\cos\alpha_2,\\
N_A = \frac{1}{2}\left(g\frac{2l - l_1}{l} + \beta u_1\cos\alpha_1\right),\\
N_B = \frac{1}{2}\left(g\frac{l_1}{l} - \beta u_1\cos\alpha_1\right),
\end{gathered} \tag{4.6}$$

где $\varepsilon_1 = \dfrac{J_x}{J_x + h^2}$, $\varepsilon_2 = \dfrac{J_z}{l^2}$, $\beta = \dfrac{h}{l}$.

Уравнения (4.6) необходимо решать относительно 6 неизвестных $\{u_1\ \ u_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ N_A,\ N_B\}$, причем $u_1 > 0$, $u_2 > 0$, $N_A > 0$, $N_B > 0$, $\alpha_j \in [0, 2\pi]$, $j = 1, 2$.

Отметим, что уравнения (4.6) являются определяющими для всех безотрывных, *скользящих в двух точках A и B*, решений, выходящих из нулевого состояния. Следуя основному принципу, мы должны также рассмотреть безотрывные движения, входящие в нулевое состояние (то есть при $t < 0$). Если такие движения осуществляются *со скольжением в двух точках A и B*, то они также определяются уравнениями (4.6), где надо заменить f на $(-f)$, так как силы трения $\overline{F}_A$ и $\overline{F}_B$ для таких движений направлены вдоль (сонаправлены) векторов ускорений соответствующих точек.

Покажем, как применять уравнения (4.6) для *очень низкой скамейки,* то есть при $h \to 0$ (тогда и $\beta \to 0$). Будем считать, что это — невесомый стержень длины $2l$ с двумя точечными массами m_1, m_2 на концах $(m_1 + m_2 = 1)$, который прижимается к опорной плоскости посредством силы тяжести. В этом случае имеем: $l_1 = 2m_2l$, $J_z = m_1(2m_2l)^2 + m_2(2m_1l)^2 = 4m_1m_2l^2$, $N_A = m_1g$, $N_B = m_2g$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 4m_1m_2$.

Тогда из (4.6) получаем

$$\begin{gathered}
\sin\alpha_1(m_1u_1 + fN_A) + \sin\alpha_2(m_2u_2 + fN_B) = Q_2,\\
\sin\alpha_1(-2m_1m_2u_1 - fN_A2m_2) + \sin\alpha_2(2m_1m_2u_2 + fN_B2m_1) =\\
= Q_3 - Q_2(2m_2 - 1).
\end{gathered} \tag{4.7}$$

Из этих уравнений получаем равенство

$$\sin\alpha_1(-m_1u_1 - fN_A) + \sin\alpha_2(m_2u_2 + fN_B) = Q_3. \tag{4.8}$$

Эти уравнения можно получить и непосредственно, рассматривая три уравнения плоского движения стержня с массами

$$\begin{gathered} w_3 = Q_1 + F_{Ax} + F_{Bx}, \\ m_1w_1 + m_2w_2 = Q_2 + F_{Ay} + F_{By}, \\ m_2w_2 - m_1w_1 = Q_3 + F_{By} - F_{Ay}. \end{gathered}$$

Используя переменные u_j, α_j $(j = 1, 2)$, отсюда получим

$$\begin{gathered} u_1\cos\alpha_1 = u_2\cos\alpha_2 = Q_1 - fN_A\cos\alpha_1 - fN_B\cos\alpha_2, \\ m_1u_1\sin\alpha_1 + m_2u_2\sin\alpha_2 = Q_2 - fN_A\sin\alpha_1 - fN_B\sin\alpha_2, \\ m_2u_2\sin\alpha_2 - m_1u_1\sin\alpha_1 = Q_3 - fN_B\sin\alpha_2 + fN_A\sin\alpha_1, \end{gathered}$$

последние два уравнения дают соответственно (4.7), (4.8), а используя первое соотношение, мы получим

$$\cos\alpha_1 = \frac{Q_1u_2}{\Delta}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{Q_1u_1}{\Delta}, \quad \Delta = u_1u_2 + f(N_Au_2 + N_Bu_1). \tag{4.9}$$

Исключая α_1, α_2 из соотношений (4.7)—(4.9), имеем следующие два уравнения:

$$\begin{gathered} \frac{Q_1^2u_2^2}{\Delta^2} + \frac{a^2}{(m_1u_1 + fN_A)^2} = 1, \\ \frac{Q_1^2u_1^2}{\Delta^2} + \frac{b^2}{(m_2u_2 + fN_B)^2} = 1, \end{gathered} \tag{4.10}$$

где $a = \dfrac{Q_2 - Q_3}{2}$, $b = \dfrac{Q_2 + Q_3}{2}$.

Используя тождество

$$\Delta = u_2(m_1u_1 + fN_A) + u_1(m_2u_2 + fN_B),$$

из (4.10) получаем соотношение

$$|Q_1| = \sqrt{(m_1u_1 + fN_A)^2 - a^2} + \sqrt{(m_2u_2 + fN_B)^2 - b^2}. \tag{4.11}$$

Отсюда мы видим, что при выполнении неравенства (4.4) для статического равновесия уравнение (4.11) при $u_1 > 0$, $u_2 > 0$ решений не имеет.

Этот результат был получен ранее в статье [7]. Отсутствие движений с вращением вокруг точки A или B обеспечивается неравенствами (4.5).

Отметим, что меняя в (4.10) f на $(-f)$, мы получим уравнения для определения входящих в нулевое состояние движений, которое, как нетрудно убедиться, имеют решения всегда, то есть при любых Q_j $(j = \overline{1,3})$! Таким образом, при выполнении условий (4.4), (4.5) приход тела в нулевое состояние означает и полную его остановку. Если же (4.4), (4.5) не выполнены, то полной остановки не происходит в такой ситуации.

Рассмотрим далее случай $\beta \neq 0$ $(h \neq 0)$. Пусть тело симметричное, то есть $l_1 = l$. Тогда уравнения (4.6) примут вид

$$\begin{gathered} Q_1 = \cos\alpha_1\left(u_1 + fN_A + fN_B\frac{u_1}{u_2}\right), \\ Q_2 = \sin\alpha_1\left(fN_A + \frac{1}{2}\varepsilon_1u_1\right) + \sin\alpha_2\left(fN_B + \frac{1}{2}\varepsilon_1u_2\right), \\ Q_3 = \sin\alpha_1\left(-fN_A - \frac{1}{2}\varepsilon_2u_1\right) + \sin\alpha_2\left(fN_B + \frac{1}{2}\varepsilon_2u_2\right), \\ N_A = \frac{1}{2}(g + \beta u_1\cos\alpha_1), \quad N_B = \frac{1}{2}(g - \beta u_1\cos\alpha_1), \\ u_1\cos\alpha_1 = u_2\cos\alpha_2. \end{gathered} \tag{4.12}$$

Рассмотрим простейший случай: вся масса скамейки сосредоточена в точке G, тогда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ и уравнения (4.12) сводятся к следующим. Обозначим $N_A = x$, тогда $N_B = g - x$, $x \in (0, g)$. Исключая из (4.12) α_1 и α_2, получим три уравнения

$$\frac{a^2}{f^2(g-x)^2} + \left(\frac{2x-g}{\beta u_2}\right)^2 = 1,$$
$$\frac{b^2}{f^2x^2} + \left(\frac{2x-g}{\beta u_1}\right)^2 = 1,$$
$$Q_1 = \frac{2x-g}{\beta}\left(1 + \frac{fx}{u_1} + \frac{f(g-x)}{u_2}\right),$$

где $a = \dfrac{Q_2+Q_3}{2}$, $b = \dfrac{Q_2-Q_3}{2}$, $u_1 > 0$, $u_2 > 0$, $x \in (0, g)$.

Без ограничения общности будем считать $Q_1 > 0$, тогда должно быть $2x - g > 0$, то есть $x \in \left(\dfrac{g}{2}, g\right)$. Из полученных соотношений имеем одно уравнение

$$Q_1 = \frac{2x-g}{\beta} + \sqrt{f^2x^2 - b^2} + \sqrt{f^2(g-x)^2 - a^2}, \quad x \in \left(\frac{g}{2}, g\right). \tag{4.13}$$

Искомое движение реализуется тогда и только тогда, когда уравнение (4.13) имеет решение при $x \in \left(\dfrac{g}{2}, g\right)$.

Обозначим через $\psi(x)$ — функцию в правой части уравнения (4.13):

$$\psi(x) = \frac{2x-g}{\beta} + \sqrt{f^2x^2 - b^2} + \sqrt{f^2(g-x)^2 - a^2}. \tag{4.14}$$

Область определения функции $\psi(x)$ из (4.14) есть отрезок

$$\frac{g}{2} \leqslant x \leqslant x^* = g - \frac{a}{f}. \tag{4.15}$$

Ищем максимум и минимум функции $\psi(x)$ на отрезке (4.15). Имеем

$$\psi'_x = \frac{2}{\beta} + \frac{f^2x}{\sqrt{f^2x^2 - b^2}} - \frac{f^2(g-x)}{\sqrt{f^2(g-x)^2 - a^2}}, \tag{4.16}$$

$$\psi''_{xx} = -\left(\frac{f^4b^2}{\sqrt{(f^2x^2 - b^2)^3}} + \frac{f^4a^2}{\sqrt{(f^2(g-x)^2 - a^2)^3}}\right) < 0. \tag{4.17}$$

В силу неравенства (4.17) функция $\psi(x)$ является выпуклой кверху, то есть она имеет единственный максимум, который находится из решения уравнения $\psi'(x) = 0$, а минимум достигается на концах отрезка (4.15). Разберем два случая.

1. Уравнение $\psi'(x) = 0$ не имеет корней на интервале $\left[\dfrac{g}{2}, x^*\right]$. Для этого в силу монотонного убывания функции $\psi'(x)$ должно выполняться неравенство

$$\psi'(x)|_{x=\frac{g}{2}} < 0,$$

т. е.

$$\frac{2}{\beta} + \frac{f^2g}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\dfrac{f^2g^2}{4} - b^2}} - \frac{1}{\sqrt{\dfrac{f^2g^2}{4} - a^2}}\right) < 0$$

или так:

$$\frac{2}{\beta} + f^2 g \left(\frac{1}{\sqrt{f^2g^2 - 4b^2}} - \frac{1}{\sqrt{f^2g^2 - 4a^2}} \right) < 0. \tag{4.18}$$

Тогда максимум и минимум $\psi(x)$ достигаются на концах отрезка (4.15):

$$\max \psi(x) = \max\{\psi\left(\frac{g}{2}\right), \psi(x^*)\},$$
$$\min \psi(x) = \min\{\psi\left(\frac{g}{2}\right), \psi(x^*)\}.$$

2. Уравнение $\psi'(x) = 0$ имеет корень $x = x^{**}$ на интервале $\left[\frac{g}{2}, x^*\right]$. Для этого должно выполняться неравенство, противоположное неравенству (4.18). Ясно, что корень x^{**} — единственный и всегда существует, так как $\psi'(x)|_{x=x^*} = -\infty$! Тогда имеем

$$\max \psi(x) = \psi(x^{**}),$$
$$\min \psi(x) = \min\{\psi\left(\frac{g}{2}\right), \psi(x^*)\}.$$

Итак, мы получим следующий результат.

Теорема 3. *Исходящие из нулевого состояния движения существуют тогда и только тогда, когда*

$$Q_1 \in [\psi_1, \psi_2],$$

где $\psi_1 = \min\{\psi\left(\frac{g}{2}\right), \psi(x^*)\}$, $x^* = g - \frac{a}{2f}$

$$\psi_2 = \begin{cases} \max\{\psi\left(\frac{g}{2}\right), \psi(x^*)\}, & \textit{при выполнении } (4.18), \\ \psi(x^{**}), & \textit{при невыполнении } (4.18), \end{cases}$$

где x^{**} *— корень уравнения* $\psi'(x) = 0$, $x \in \left(\frac{g}{2}, x^*\right)$,

$$\psi\left(\frac{g}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{f^2g^2 - 4b^2} + \sqrt{f^2g^2 - 4a^2}\right),$$
$$\psi(x^*) = \frac{1}{\beta}\left(g - \frac{a}{f}\right) + \sqrt{f^2\left(g - \frac{a}{f}\right)^2 - b^2}.$$

Замечание 3. Условие статического равновесия имеет вид (см. неравенство (4.4))

$$0 < Q_1 < \psi\left(\frac{g}{2}\right),$$

поэтому в этих условиях теорема дает, что дополнительное движение существует лишь тогда, когда

$$\psi(x^*) < \psi\left(\frac{g}{2}\right), \quad \psi(x^*) < Q_1 < \psi\left(\frac{g}{2}\right).$$

Замечание 4. Если $Q_1 > \psi_2$, то согласно теореме, движений со скольжениями в точке A и B, исходящих из нулевого состояния, не существует. Если неравенства (4.5) соблюдены, то нереализуемы также и вращения вокруг точки A или B. Физический смысл такого эффекта заключается в том, что при больших Q_1 может осуществляться только движение с отрывом одной из опор, которые мы здесь не рассматриваем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пэнлеве П. Лекции о трении. — М.: Гостехиздат, 1954. — 316 с.

2. Козлов В. В. Динамика систем с неинтегрируемыми связями. 1–5 // Вестник Моск. ун-та, серия Математика, Механика. — 1982. — №3. — С. 92–100; 1982. — №4. — С. 70–76; 1983. — №3. — С. 102–111; 1987. — №5. — С. 76–83; 1988. — №6. — С. 51–54.

3. Розенблат Г. М. Движение плоского твердого тела по шероховатой прямой // Нелинейная динамика. — 2006. — Т. 2, №3. — С. 293–306.

4. Аппель П. Теоретическая механика. — 1960. — Т. 2. — ГИФМЛ. — 487 с.

5. Жуковский Н. Е. Условие равновесия твердого тела, опирающегося на неподвижную плоскость некоторой площадкой и могущего перемещаться вдоль этой плоскости с трением // Собрание сочинений. Т. 1. — М.: Гостехтеориздат, 1949. — с. 339–354.

6. Иванов А. П. Условия однозначной разрешимости уравнений динамики систем с трением // ПММ. — 2008. — Т. 72, вып. 4. — С. 531–547.

7. Пожарицкий Г. К. Распространение принципа Гаусса на системы с сухим трением // ПММ. — 1961. — Т. 25, вып. 4. — С. 391–406.

8. Jellet J. H. A Treatise on the Theory of Friction, London: Macmillan, 1872.

Поступила в редакцию 20.04.09

G. M. Rozenblat

On the settings of problems in dynamics of a rigid body with constraints and Painlevé paradoxes

We consider basic concepts for setting the problems of motion of a rigid body with constraints (with and without dry friction). The main accent is placed upon the prehistory of initial condition of a problems, which should be formulated in a correct manner which would not require introducing additional hypothesis and assumptions which make one to leave the frames of the rigid body dynamics without impacts. With such correct formulation, the dynamics of motion (or equilibrium) of rigid bodies can be described without occurence of some paradoxic situations (Painlevé paradoxes). The presented methodology is illustrated by three well-known problems in mechanics: 1) rigid body with a single contact point with a surface in the presence of dry friction, 2) sliding bar in the sliding ways with dry friction, 3) rigid body with two point contact in the presence of dry friction (“bench”).

Keywords: system with constraints, dry friction, Painlevé paradoxes

Mathematical Subject Classifications: 37N15

Розенблат Григорий Маркович,
к. ф.-м. н., доцент кафедры теоретической механики,
Московский автомобильно-дорожный институт,
125319, Москва, Ленинградский проспект, 64
E-mail: gr51@mail.ru