

УДК 532.5.032

© В. В. Пак

ОСЕСИММЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЬЦЕВОЙ СТРУКТУРЫ В ДВУХСЛОЙНОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Разработана осесимметрическая модель на основе упрощенных уравнений вязкой жидкости для исследования двухслойного течения со свободной границей, создаваемого подъемом жесткого блока фундамента. Получено численное решение полной нелинейной системы и выполнен анализ малых возмущений движения границ слоев. Основным результатом заключается в том, что кольцевая структура образуется на поверхности жидкости, если плотность нижнего слоя больше, чем у верхнего. Предлагаемая модель может представлять интерес для геофизики при изучении процесса образования крупномасштабных кольцевых структур на поверхности Земли и других планет.

Ключевые слова: стоксово течение, многослойные течения, длинноволновое приближение, нелинейная диффузия, кольцевые структуры.

Введение

Исследование медленных течений многослойной вязкой жидкости со свободной границей, кроме многочисленных практических приложений, является одной из наиболее важных проблем в гидродинамике ([1, 2, 3]).

В данной статье рассматривается один из ранее не изученных режимов осесимметричного течения двухслойной жидкости, создаваемого поднимающимся жестким цилиндрическим блоком фундамента (см. рис. 1). Т.к. поверхностное натяжение и другие нелинейные эффекты оказываются пренебрежимо малыми из-за большой вязкости [3], движение жидкости инициируется, в основном, гравитационными силами и вязкими напряжениями. Исследование эволюции такого течения весьма затруднительно из-за сильного взаимодействия слоев: верхний слой приподнимается и растягивается нижележащим слоем, который, в свою очередь, испытывает нагрузку и сдвиговые напряжения, создаваемые верхним слоем. Как было показано в предыдущих исследованиях плоской модели [1, 3], это приводит к нетривиальному, трудно предсказуемому поведению границ слоев на больших временах.

В предположении малости толщины слоев по сравнению с горизонтальным масштабом возмущений использовались упрощенные уравнения в длинноволновом приближении (уравнения смазочного слоя), которые приводят к системе квазилинейных уравнений параболического типа для границ слоев.

Получено численное решение полной нелинейной системы и выполнен анализ малых возмущений. Это позволило выявить основные особенности течения на малых и на больших временах. Полученные результаты могут представлять интерес для геофизики при исследовании образования крупномасштабных кольцевых структур на Земле и других планетах.

§ 1. Система уравнений и краевые условия

Рассмотрим вязкую жидкость, состоящую из двух несмешивающихся слоев (обозначены индексами $i = 1, 2$), которые ограничены поверхностями раздела $z = Z_i, i = \overline{1, 3}$ и боковой границей $r = r_b$. Пусть течение создается поднимающимся цилиндрическим блоком фундамента с радиусом R . Этот подъем моделируется заданием вертикальной составляющей скорости на нижней границе. Верхняя граница Z_1 является свободной. Общая схема модели показана на рис. 1.

Осесимметрическое течение описывается в цилиндрических координатах (r, φ, z) , где r , φ и z — это соответственно радиальная, азимутальная и вертикальная координаты. Пусть начало координат совпадает с пересечением оси симметрии и фундамента. Все переменные предполагаются независимыми от φ .

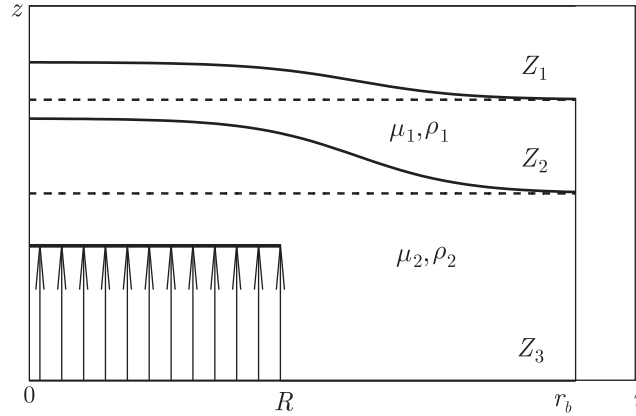


Рис. 1. Общая схема расчетной области. Сплошными линиями обозначены границы слоев, пунктирными — их начальные положения. Стрелками обозначен поднимающийся блок фундамента

Движение вязкой несжимаемой жидкости в поле силы тяжести при условии осевой симметрии описывается следующими уравнениями [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu_i \left[\frac{1}{r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right], \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu_i \left[\frac{1}{r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} \right] - \rho_i g, \\ \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где ρ_i, μ_i , $i = \overline{1, 2}$ — плотности и вязкости слоев (постоянные внутри слоев), u_r, u_z — радиальная и вертикальная компоненты скорости, p — давление, g — ускорение силы тяжести.

Для замыкания системы (1.1) на границах слоев задаются следующие краевые условия [4]:

- (1) На границе Z_1 : условия свободной поверхности, т. е. нормальная и касательная составляющие напряжения равны нулю:

$$\begin{aligned} \left(-p + 2\mu_1 \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) n_1^1 + \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) n_2^1 &= 0, \\ \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) n_1^1 + \left(-p + 2\mu_1 \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) n_2^1 &= 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где n_j^i — направляющие косинусы нормали к границе Z_i , которые вычисляются по формулам:

$$n_1^i = -\frac{\frac{\partial Z_i}{\partial r}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial Z_i}{\partial r} \right)^2}}, \quad n_2^i = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial Z_i}{\partial r} \right)^2}}, \quad (1.3)$$

- (2) на границе Z_2 : условия полного прилипания, т. е. составляющие скорости и напряжения непрерывны:

$$\begin{aligned} [u_r]_{\pm}^+ &= 0, \quad [u_z]_{\pm}^+ = 0, \\ \left[\left(-p + 2\mu_1 \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) n_1^2 + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) n_2^2 \right]_{\pm}^+ &= 0, \\ \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{u_z}{r} \right) n_1^2 + \left(-p + 2\mu_1 \frac{u_z}{z} \right) n_2^2 \right]_{\pm}^+ &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $[\cdot]_{\pm}^+$ — скачок функции.

(3) На границе Z_3 : составляющие скорости движения фундамента:

$$u_r = 0, \quad u_z = WH(1 - r), \quad (1.5)$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда.

Кроме этого, на подвижных границах раздела Z_i задавались кинематические условия отсутствия перетока массы, т. е. нормальная составляющая скорости частиц жидкости на границе равна скорости движения самой границы:

$$u_z(r, Z_i, t) - \frac{\partial Z_i}{\partial r} u_r(r, Z_i, t) - \frac{\partial Z_i}{\partial t} = 0, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (1.6)$$

На боковой границе расчетной области, а также на оси симметрии, радиальная скорость задвалась равной нулю:

$$u_r(0, z, t) = 0, \quad u_r(r_b, z, t) = 0. \quad (1.7)$$

Для описания движения жидкости использовались упрощенные уравнения в длинноволновом приближении, полученные из (1.1) при следующих предположениях:

- (1) характерный горизонтальный масштаб возмущений много больше вертикального.
- (2) негидростатические напряжения много меньше гидростатического давления;
- (3) плотность не убывает с глубиной

Выберем в качестве горизонтального и вертикального масштаба R и ϵR , где ϵ — малый параметр, и перейдем к безразмерным переменным:

$$\begin{aligned} r &= R r', & z &= \epsilon R z', & \mu_i &= \mu_0 \mu'_i, & \rho_i &= \rho_0 \rho'_i, \\ u_r &= u_0 u'_r, & u_z &= \epsilon u_0 u'_z, & p &= p_0 p', \end{aligned} \quad (1.8)$$

где μ_0 , ρ_0 , $p_0 = \rho_1 g \epsilon R$, $u_0 = \frac{\epsilon^3 \rho_0 g R^2}{\mu_0}$ и $t_0 = \frac{R}{u_0}$ — это соответственно масштабы плотности, вязкости, скорости и времени. Подставляя (1.8) в (1.1)–(1.6) и пренебрегая величинами порядка $o(\epsilon)$, получим следующие уравнения (в дальнейшем для удобства штрихи опускаются):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \mu_i \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}; \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho_i; \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

и граничные условия

$$p = 0, \quad \mu_1 \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0, \quad z = Z_1, \quad (1.10)$$

$$[u_r]_{-}^{+} = 0, \quad [p]_{-}^{+} = 0, \quad \left[\mu_1 \frac{\partial u_r}{\partial z} \right]_{-}^{+} = 0, \quad z = Z_2, \quad (1.11)$$

$$u_r = 0, \quad u_z = WH(1 - r), \quad z = Z_3, \quad (1.12)$$

$$u_z(r, Z_i, t) - \frac{\partial Z_i}{\partial r} u_r(r, Z_i, t) - \frac{\partial Z_i}{\partial t} = 0, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (1.13)$$

Пусть в начальный момент границы являются плоскими:

$$Z_i(r, 0) = Z_{0i}, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (1.14)$$

Решая (1.9) с учетом условий (1.10)–(1.12), получим выражения для u_r , u_z и p на границах Z_i . В результате подстановки их в (1.13) и некоторых преобразований получаются уравнения относительно Z_i :

$$\frac{\partial Z_i}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \sum_{j=0}^2 A_{ij} \Delta \rho_j \frac{\partial Z_j}{\partial r} \right] + W H(1-r), \quad (1.15)$$

$$Z_3(r, t) = t W H(1-r)$$

где

$$A_{ji} = A_{ij} = \sum_{l=i}^2 \sum_{m=j}^2 a_{lm}, \quad i \leq j, \quad i, j = \overline{1, 2},$$

$$a_{ji} = a_{ij} = h_i h_j \sum_{k=j}^2 \frac{1}{\mu_k} \frac{h_k}{1 + \delta_{jk} + \delta_{ij}} \quad (1.16)$$

$$h_i = Z_{i+1} - Z_i,$$

$$\Delta \rho_1 = \rho_1, \quad \Delta \rho_2 = \rho_2 - \rho_1,$$

$$\delta_{ij} \text{ символ Кронекера.}$$

Так как из решения (1.9) u_r представляет собой линейную комбинацию производных Z_i , условия (1.7) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial Z_i}{\partial r}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial Z_i}{\partial r}(r_b, t) = 0. \quad (1.17)$$

Так как $h_i > 0$ и $i < j \Rightarrow \rho_i \leq \rho_j$, все параметры системы (1.16) являются положительными

$$a_{ij} > 0, \quad A_{ij} > 0, \quad \Delta \rho_i \geq 0, \quad i, j = \overline{1, 2} \quad (1.18)$$

В работе [1] использовалась аналогичная система в двумерном варианте, в [5] было получено решение задачи (1.9)–(1.13) для произвольного числа слоев.

§ 2. Численное решение

Для численного решения системы уравнений (1.15) была использована полностью неявная разностная схема, абсолютно устойчивая по времени [6]:

$$\frac{\Delta^m Z_{i,n}}{\Delta t} = \frac{1}{r_n} \sum_{j=0}^2 \frac{\Delta \rho_j}{\Delta_{n-\frac{1}{2}}} \left(r_{n+\frac{1}{2}} A_{ij, n+\frac{1}{2}}^{m+1} \frac{\Delta_n Z_i^{m+1}}{\Delta_n r} - r_{n-\frac{1}{2}} A_{ij, n-\frac{1}{2}}^{m+1} \frac{\Delta_{n-1} Z_i^{m+1}}{\Delta_{n-1} r} \right) +$$

$$+ W_n H(r_n - 1), \quad i = \overline{1, 2}, \quad (2.1)$$

$$Z_{3,n}^{m+1} = Z_{3,n}^m + \Delta t W_n H(r_n - 1),$$

где

$$\Delta^m Z_{i,n} = Z_{i,n}^{m+1} - Z_{i,n}^m,$$

$$\Delta_n Z_i^{m+1} = Z_{i,n+1}^{m+1} - Z_{i,n}^{m+1},$$

$$A_{ij, n\pm\frac{1}{2}}^{m+1} = A_{ij} \left(\frac{h_n^{m+1} + h_{n\pm 1}^{m+1}}{2} \right),$$

$$r_{n\pm\frac{1}{2}} = \frac{r_n + r_{n\pm 1}}{2}, \quad \Delta r_{n-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta_n r + \Delta_{n-1} r}{2},$$

надстрочные и подстрочные индексы обозначают номера узлов по времени и радиальной координате, Δt и Δr — это шаги по времени и радиальной координате.

Коэффициенты $Z_{i,n}^{m+1}$ на следующем временном слое определялись путем итерационного уточнения.

При расчетах были использованы следующие значения параметров слоев:

$$Z_{01} = 1,0, \quad Z_{02} = 0,5, \quad Z_{03} = 0;$$

$$\rho_1 = 3, \quad \rho_2 = 3.2; \quad \mu_1 = 30, \quad \mu_2 = 30;$$

$$\text{Тогда } \epsilon \simeq 0.1, \quad u_0 \simeq 10^{-3}, \quad Re \simeq 10^{-2}, \quad t_0 \simeq 10^3.$$

Вертикальная составляющая подъема блока основания выбиралась равной $W = 0,056$.

Численные результаты представлены на рис. 2–5. Для того чтобы наглядно показать форму границ слоев для малых и больших значений r на одном и том же графике, использовалась нелинейная шкала $r_{sqrt} = \sqrt{r}$. Так как масштабы отклонений z_1 и z_2 разного порядка, на графиках использовались разные вертикальные оси, т. е. левая — для z_1 и правая — для z_2 .

При одинаковой плотности обоих слоев граница z_1 , также как и z_2 , сохраняют колоколообразную форму на всех стадиях эволюции (см. рис. 2).

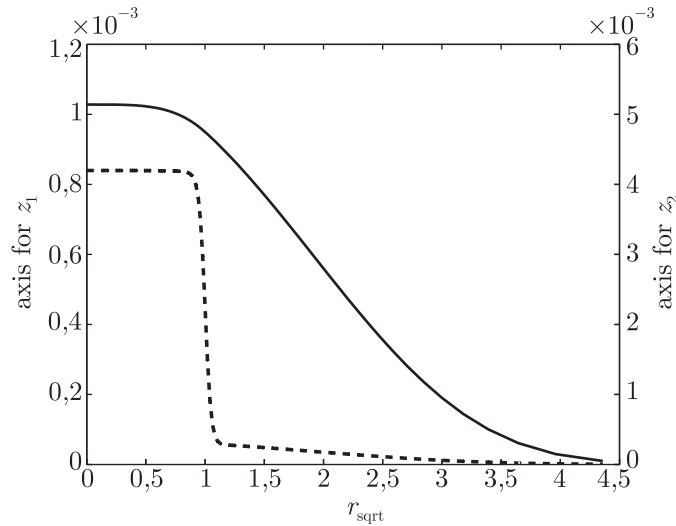


Рис. 2. Эволюция границ z_1 и z_2 на больших временах ($t = 1$) при одинаковой плотности слоев. Графики z_1 и z_2 изображены сплошной и пунктирной линиями соответственно. Высота подъема блока фундамента равна 0,056

При разных плотностях слоев поведение границы z_2 не отличается заметным образом от предыдущего варианта, однако в эволюции верхней границы можно выделить три различные стадии.

На малых временах (см. рис. 3) внедряющийся блок фундамента вызывает подъем обеих границ, профиль которых постепенно сглаживаются за счет горизонтального перетекания жидкости в слоях под действием гравитационных сил, что приводит к формированию колоколообразной структуры на z_1 и z_2 . Так как при подъеме границ их наклон над краем блока ($r = 1$) становится круче, это приводит к увеличению градиента давления и соответственно усилению радиального течения в слоях по направлению от вертикальной оси z и к растягиванию верхнего слоя.

На промежуточной стадии (см. рис. 4), т. к. мощность верхнего слоя уменьшается в основном в окрестности $r = 1$, впадина с положительной кривизной первоначально появляется именно здесь. Граница z_2 приподнимается медленнее по сравнению с начальной стадией.

На больших временах (см. рис. 5) впадина захватывает всю центральную часть z_1 над поднимающимся блоком, и ее уровень опускается ниже первоначального положения, тогда как приподнятая часть растет скорее по ширине, чем по высоте. В результате на границе z_1 образуется кольцевая структура.

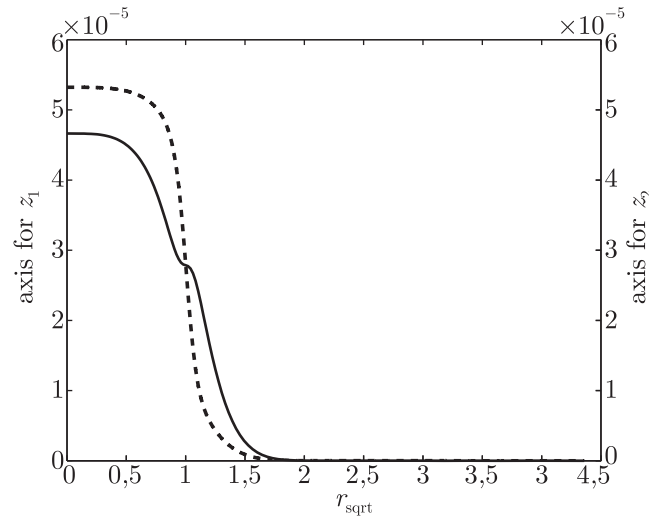


Рис. 3. Эволюция границ z_1 и z_2 на малых временах ($t = 0,001$) при $\Delta\rho_2 = 0,2$. Графики z_1 и z_2 изображены сплошной и пунктирной линиями. Высота подъема блока фундамента равна $5,6 \cdot 10^{-4}$

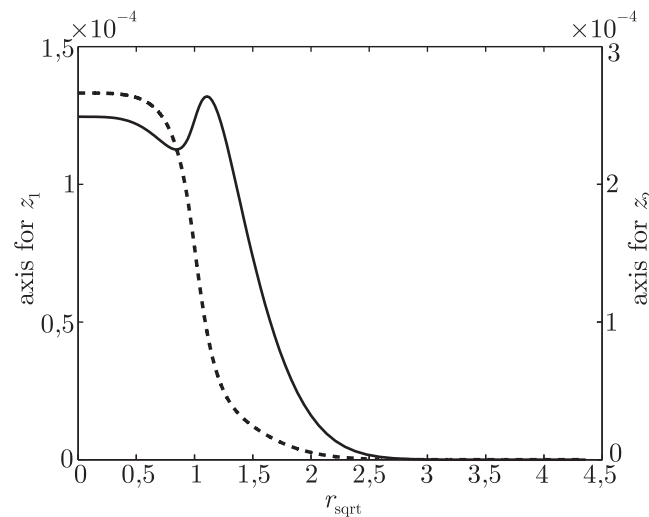


Рис. 4. Эволюция границ z_1 и z_2 на промежуточной стадии ($t = 0,06$) при $\Delta\rho_2 = 0,2$. Графики z_1 и z_2 изображены сплошной и пунктирной линиями. Высота подъема блока фундамента равна $0,0033$.

§ 3. Анализ малых возмущений

Если отклонений границ слоев от начального положения малы, т. е.

$$Z_i = Z_{0i} + z_i, \quad z_i \ll 1, \quad i = \overline{1, 2}, \quad (3.1)$$

то эволюцию Z_i можно описать линеаризованными уравнениями, коорые получаются подстановкой (3.1) в (1.15):

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} = \overline{A}_{ij} \Delta\rho_j \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \sum_{j=1}^2 \frac{\partial z_j}{\partial r} \right] + W H(r-1), \quad (3.2)$$

$$i = \overline{1, 2},$$

где $\overline{A}_{ij} = A_{ij}(Z_{0i})$.

Из (1.14) начальные условия для z_i являются нулевыми:

$$z_i(r, 0) = 0, \quad i = \overline{1, 2}. \quad (3.3)$$

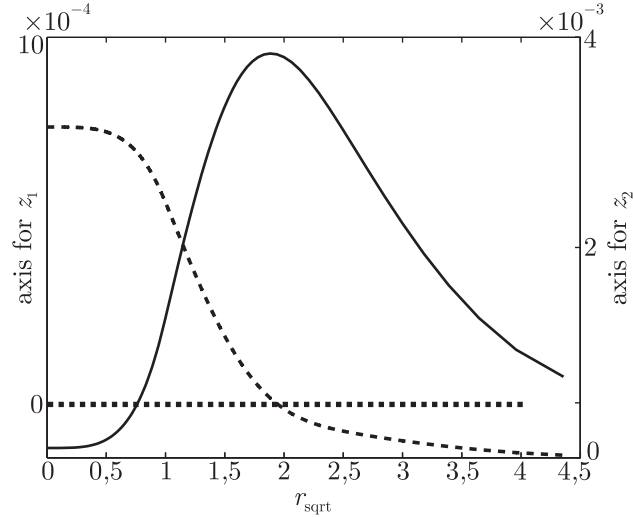


Рис. 5. Эволюция границ z_1 и z_2 на больших временах ($t = 1,486$) при $\Delta\rho_2 = 0,2$. Графики z_1 и z_2 изображены сплошной и пунктирной линиями. Высота подъема блока фундамента равна 0,085

Тогда решение (3.2) имеет следующий вид:

$$z_i(r, t) = W \sum_{j=1}^2 C_{ij} f(\lambda_j, r, t), \quad i = \overline{1, 2}, \tag{3.4}$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{\bar{A}_{11} \Delta\rho_1 + \bar{A}_{22} \Delta\rho_2 \pm D}{2}, \\ D &= \sqrt{(\bar{A}_{11} \Delta\rho_1 - \bar{A}_{22} \Delta\rho_2)^2 + 4 \bar{A}_{12}^2 \Delta\rho_1 \Delta\rho_2}, \\ C_{1i} &= \pm \frac{(\bar{A}_{12} - \bar{A}_{22}) \Delta\rho_2 + \lambda_i}{D}, \\ C_{2i} &= \frac{(\bar{A}_{22} \Delta\rho_2 - \bar{A}_{11} \Delta\rho_1) \pm D}{2 \Delta\rho_2 \bar{A}_{12}} C_{1i}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

и $f(\lambda_i, r, t)$ — это решения начально-краевой задачи для параболического уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\lambda_i}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + H(r - 1), \quad i = \overline{1, 2}, \\ f(\lambda_i, r, 0) &= 0, \quad \frac{\partial f}{\partial r}(\lambda_i, 0, t) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial r}(\lambda_i, r_b, t) = 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Из (1.18) и (3.5) можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \geq \lambda_2, \quad \lambda_1 + \lambda_2 &= \bar{A}_{11} \Delta\rho_1 + \bar{A}_{22} \Delta\rho_2 \geq 0, \\ \lambda_1 \lambda_2 &= (\bar{A}_{11} \bar{A}_{22} - \bar{A}_{12}^2) \Delta\rho_1 \Delta\rho_2 = \\ &= \frac{\bar{h}_1^2 \bar{h}_2^3}{3\mu_2} \left(\frac{\bar{h}_1}{3\mu_1} + \frac{\bar{h}_2}{4\mu_2} \right) \Delta\rho_1 \Delta\rho_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Так как $\lambda_i \geq 0$, задача (3.6) корректно поставлена.

Если боковые границы области значительно удалены от поднимающегося блока ($r_b \gg 1$), то они не оказывают существенное влияние на поведение границ. Поэтому можно решать задачу для бесконечной области (задачу Коши). Ее аналитическое решение для $\lambda_i > 0$ имеет вид:

$$f(\lambda_i, r, t) = \frac{1}{2 \lambda_i} \int_0^t \exp\left(-\frac{r^2 + 1}{4 \lambda_i \tau}\right) \sum_{i=0}^1 (-1)^{k+1} I_k\left(\frac{r}{2 \lambda_i \tau}\right) r^k \frac{t - \tau}{\tau^2} d\tau + t H(r - 1), \tag{3.8}$$

где $I_k(x)$ — это модифицированные функции Бесселя (см. [7]).

Функции $f(\lambda_i, r, t)$ являются монотонно убывающими на бесконечности по пространству и монотонно возрастающими по времени (см. [6]).

Пусть плотности слоев различны.

Докажем монотонность $z_2(r, t)$. Предварительно из (1.18) и (3.7) получим

$$\begin{aligned} C_{11} > 0, \quad C_{12} < 0, \quad C_{11} + C_{12} = 1, \\ \frac{C_{11}}{\lambda_1} + \frac{C_{12}}{\lambda_2} = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\bar{a}_{12} \Delta \rho_2 + \lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2 D} < 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Так как $D^2 - (A_{11} - \Delta \rho_2 A_{22})^2 = 4 \Delta \rho_2 A_{12} > 0$, из (3.5) и (3.9) легко видеть, что C_{21} и C_{22} положительны. Тогда z_2 является монотонной в любой момент времени, и поверхность Z_2 имеет колоколообразную форму с максимумом в точке $r = 0$.

Покажем, что в отличие от z_2 функция z_1 не является монотонной. Поведение z_1 в центральной точке $r = 0$ описывается следующими функциями, полученными из (3.8).

$$\begin{aligned} z_1(0, t) &= W t \left[1 - \sum_{i=1}^2 C_{1i} \exp\left(-\frac{1}{4 \lambda_i t}\right) \right] + \\ &\quad + W \sum_{i=1}^2 \frac{C_{1i}}{4 \lambda_i} \text{Ei}\left(\frac{1}{4 \lambda_i t}\right), \\ \frac{\partial z_1}{\partial t}(0, t) &= W \left[1 - \sum_{i=1}^2 C_{1i} \exp\left(-\frac{1}{4 \lambda_i t}\right) \right], \\ \frac{\partial z_1}{\partial r}(0, t) &= 0, \\ \frac{\partial^2 z_1}{\partial r^2}(0, t) &= -\frac{W}{4} \sum_{i=1}^2 \frac{C_{1i}}{\lambda_i} \exp\left(-\frac{1}{4 \lambda_i t}\right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Исследуем эволюцию (3.8) на малых и больших временах.

1. При $t \ll 1$ получим

$$\begin{aligned} z_1(0, t) &\rightarrow W t > 0, \\ \frac{\partial z_1}{\partial t}(0, t) &\rightarrow W > 0, \\ \frac{\partial z_1}{\partial r}(0, t) &= 0, \\ \frac{\partial^2 z_1}{\partial r^2}(0, t) &\rightarrow -\frac{W \exp\left(-\frac{1}{4 \lambda_1 t}\right)}{4} \frac{C_{11}}{\lambda_1} < 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Таким образом,

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} > 0, \quad \frac{\partial z_1}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 z_1}{\partial r^2} < 0, \quad z_1 > 0. \quad (3.12)$$

Следовательно, на малых временах в окрестности точки $r = 0$ поверхность z_1 поднимается почти линейно по времени и имеет колоколообразную форму.

2. При $t \gg 1$ получим

$$\begin{aligned} z_1(0, t) &\rightarrow \frac{W}{4} \left(\frac{C_{11}}{\lambda_1} + \frac{C_{12}}{\lambda_2} \right) \ln(t) < 0, \\ \frac{\partial z_1}{\partial t}(0, t) &\rightarrow -\frac{W}{4t} \left(\frac{C_{11}}{\lambda_1} + \frac{C_{12}}{\lambda_2} \right) < 0, \\ \frac{\partial z_1}{\partial r}(0, t) &= 0, \\ \frac{\partial^2 z_1}{\partial r^2}(0, t) &\rightarrow -\frac{W}{4} \left[\frac{C_{11}}{\lambda_1} + \frac{C_{12}}{\lambda_2} \right] > 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Следовательно, на больших временах в окрестности точки $r = 0$ граница z_1 опускается почти логарифмически. Так как $\frac{\partial z_1}{\partial r} = 0$, $\frac{\partial^2 z_1}{\partial r^2} > 0$, граница z_1 имеет положительную кривизну (вогнутую форму).

Функции, описывающие эволюцию z_2 в окрестности $r = 0$, получаются простой заменой z_1 на z_2 и C_{1i} на C_{2i} в формулах (3.11):

$$\begin{aligned} z_2(0, t) &\rightarrow Wt > 0, \quad t \rightarrow 0, \\ z_2(0, t) &\rightarrow \frac{W}{4} \left(\frac{C_{21}}{\lambda_1} + \frac{C_{22}}{\lambda_2} \right) \ln(t) > 0, \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Следовательно, z_2 в окрестности центральной точки монотонно поднимается: на малых временах по линейному закону, а на больших временах — по логарифмическому, что согласуется с численными результатами.

При $r \gg \sqrt{\lambda_i t}$, используя асимптотическое разложение для модифицированных функций Бесселя (см. [7]), получим:

$$\begin{aligned} f(\lambda_i, r, t) &\approx \frac{t}{\sqrt{r}} \left[\operatorname{erfc}(r_i) \left(\frac{1}{2} + r_i^2 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{r_i \exp(-r_i^2)}{\sqrt{\pi}} \right] \approx \frac{t}{\sqrt{\pi r}} \frac{\exp(-r_i^2)}{r_i}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $\operatorname{erfc}(r)$ — это дополнительная функция ошибок, $r_i = \frac{r-1}{\sqrt{2t\lambda}}$.

Функция z_1 при больших значениях r является положительной монотонно убывающей, потому что

$$\begin{aligned} z_1(r, t) &\approx C_{11} \frac{Wt}{\sqrt{\pi r}} \frac{\exp(-r_1^2)}{r_1} \left[1 + \frac{C_{12}}{C_{11}} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \exp\left(-\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2} r_2^2\right) \right] \approx \\ &\approx C_{11} \frac{Wt}{\sqrt{\pi r}} \frac{\exp(-r_1^2)}{r_1} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Так как на больших временах z_1 имеет в точке $r = 0$ локальный минимум, она обязательно имеет хотя бы один локальный максимум в некоторой точке $r_{max} > 0$. Следовательно, поверхность Z_1 имеет кольцевую структуру.

При одинаковой плотности слоев функция z_1 является монотонной, потому что $C_{i2} = 0$ в решении (3.4). Следовательно никакой кольцевой структуры на верхней границе не образуется. Она сохраняет колоколообразную форму в любой момент времени.

§ 4. Геофизические приложения

В качестве приложения были проведены расчеты процесса образования крупномасштабных кольцевых структур, которые обнаружены с помощью космических съемок на поверхности Земли и планет земной группы [8]. Так как большая часть крупномасштабных кольцевых структур на Земле погребено под многокилометровой толщей осадочных пород и недоступно для непосредственного наблюдения, в качестве примера приводится кольцевая структура на Луне (рис. 6), представленная в [9]:

Был выполнен расчет кольцевой структуры по геометрическим размерам близкой к структуре, представленной на рис. 6 с использованием реальных геологических данных из [10]:

$$\begin{aligned} Z_{01} &= -0,5 \text{ км}, \quad Z_{02} = -5 \text{ км}, \quad Z_{03} = -10 \text{ км}; \\ \rho_L &= 2,8 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \quad \rho_1 = 2,9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \quad \rho_2 = 3,3 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \\ \mu_1 &= 10^{21} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad \mu_2 = 10^{21} \text{ Па} \cdot \text{с}. \end{aligned}$$

Радиус блока фундамента $R = 50$ км, а его вертикальная скорость подъема $W = 0,1$ см \cdot год $^{-1}$, масштаб времени $t \simeq 50 \cdot 10^6$ лет.



Рис. 6. Кольцевая структура Keeler на Луне диаметром 169 км (Фото NASA)

Для того чтобы показать взаимное расположение границ, на рис. 7 приводятся их трехмерное изображение в безразмерных координатах при $t = 30 \cdot 10^6$ лет. Максимальная вертикальная скорость движения верхней границы получилась порядка $0,04 \text{ см} \cdot \text{год}^{-1}$, а амплитуда отклонения верхней границы — 1 км. Как видно из результатов, геометрические размеры, магнитуа поднятия и время формирования модельной кольцевой структуры достаточно хорошо согласуются с реальной.

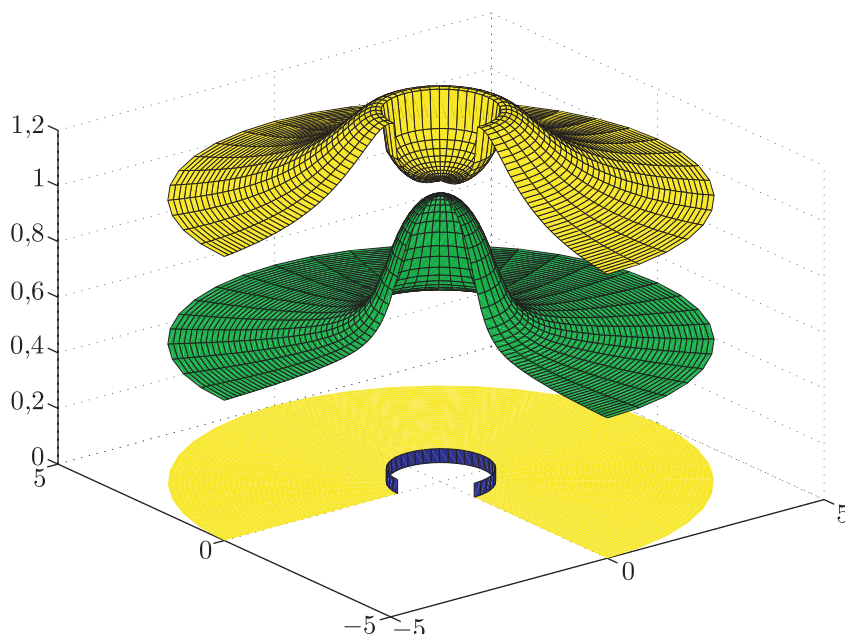


Рис. 7. График границ слоев в безразмерных координатах в момент $t \sim 25 \cdot 10^6$ лет. Для наглядности на графиках сделан разрез и масштабы смещений верхней и средней границ увеличены в 5 раз. Цилиндрический бортик на нижней границе показывает границу поднимающегося блока

При анализе малых возмущений, приведенном выше, доказывається образование, по крайней мере, одного кольцевого хребта, т.е. допускается формирование и нескольких «колец». В действительности одной из наиболее интересных и мало изученных особенностей крупномасштабных структур является наличие нескольких концентрических кольцевых хребтов (многокольцевая структура). Например на рис. 8 представлена структура Ричат. Однако, строго говоря, этот эффект невозможно исследовать в рамках данной модели, т.к. характерный горизонтальный масштаб таких «многокольцевых» возмущений уже сопоставим с вертикальным размером течения. Для этой цели необходимо исследование коротковолновых возмущений (см., например, [3]).

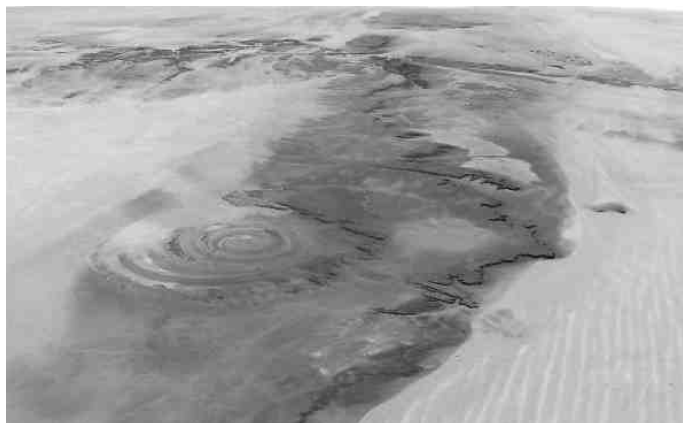


Рис. 8. Кольцевая структура Ричат в Мавритании (Сахара) диаметром 50 км (фото представлено на сайте <http://earth.imagico.de/view.php?site=mauretania1>)

Заключение

Таким образом, разработана осесимметричная модель эволюции медленного двухслойного течения вязкой жидкости со свободной границей, создаваемого поднимающимся цилиндрическим блоком фундамента и рассматривается нетривиальное поведение верхней границы жидкости на больших временах из-за взаимодействия слоев. Численные результаты, полученные с помощью этой модели, показывают, что на начальной стадии на верхней границе образуется кол околообразное поднятие, затем в его центральной части восходящие движения сменяются на нисходящие и постепенно образуется круглая впадина. В результате образуется кольцевая структура, но только при условии, если плотность нижнего слоя больше, чем у верхнего.

Был выполнен анализ малых возмущений, проведенные в малой окрестности центральной точки и на большом удалении от нее, где наклон границ минимален. Он подтвердил существенные черты динамики исследуемого течения и структуры границ слоев, полученных в численных результатах. Исходя из этого анализа, при малых возмущениях границ слоев, существование разности плотностей между слоями является необходимым и достаточным фактором формирования кольцевой структуры, а остальные параметры слоев (толщина, вязкость), а также параметры блока фундамента, хотя и могут оказывать существенное влияние на магнитуду возмущений, не меняют качественное поведение границ. Необходимо провести численное исследование, которое позволит выяснить, справедлив ли этот вывод в случае конечных возмущений границ слоев, а также нелинейной реологии вязкой жидкости, или существуют границы допустимых значений этих параметров.

Следует отметить, что в окрестности границы блока ($r = 1$) длинноволновое приближение, вообще говоря, является некорректным и, вероятно, потребует применения более общей теории (см., например, [11]).

Приведенный расчет кольцевой структуры с использованием реальных геологических данных показал, что предлагаемая модель может быть использована для исследования основных структурных особенностей крупномасштабных кольцевых образований на Земле и других планетах. Хотя приведенный анализ малых возмущений не исключает формирование и нескольких колец, для изучения более тонкой структуры необходим анализ коротковолновых возмущений, который будем предметом дальнейших исследований.

Работа выполнена при поддержке Программы № 14 фундаментальных исследований Президиума РАН «Фундаментальные проблемы информатики и информационных технологий», раздел II «Высокопроизводительные вычисления и многопроцессорные системы».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайлов В. О. Математическая модель процесса эволюции структур, образующихся в результате вертикальных движений // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1983. — №6. — С. 3–18.
2. Hu J., Millet S., Botton V., Ben Hadid H., and Henry D. Inertialess temporal and spatio-temporal stability analysis of the two-layer film flow with density stratification // Phys. of fluids. — 2006. — Vol. 18. — 104101.
3. Loewenherz D. S. and Lawrence C. J. The effect of viscosity stratification on the instability of a free surface flow at low Reynolds number // Phys. of fluids A 1. — 1989. — Vol. 10. — P. 1686–1693.
4. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. — М.: Наука, 1970. — 492 с.
5. Пак В. В., Кущов К. Г., Овчинников М. О. Численное моделирование эволюции горизонтально-слоистых морфоструктур осадочных бассейнов // Информатика и моделирование в океанологических исследованиях. Владивосток, Дальнаука, 1999. — С. 225–233.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977. — 735 с.
7. Арсенин В. А. Методы математической физики и специальные функции. — М.: Наука, 1974. — 432 с.
8. Стажевский С. Б. О вкладе кольцевых структур в напряженно-деформированное состояние окраин тихоокеанского типа и природе цунами // Физическая мезомеханика. — 2007. — Т. 10, №1. — С. 59–72.
9. Ebbing J., Janle P., Koulouris J., Milkereit B. 3D gravity modelling of the Chicxulub impact structure // Planetary and Space Science. — 2001. — Vol. 49 — P. 599–609.
10. Теркот Д., Шуберт Дж. Геодинамика. Геологическое приложение физики сплошных сред. Т. 2. — М.: Мир, 1985. — 360 с.
11. Snoeijer J. H. Free-surface flows with large slopes: Beyond lubrication theory // Phys. of fluids. — 2006. — Vol. 18. — 021701.

Поступила в редакцию 01.09.08

V. V. Pak

An axisymmetric model of the ring pattern formation in free-surface two-layered creeping flow

The axisymmetric model based on simplified equations of incompressible viscous fluid is developed to investigate the evolution of free-surface two-layered creeping flow subjected by the uplift of the substrate's block. We numerically solve the nonlinear governing equations and perform the small-amplitude analysis of the behavior of both fluid interfaces. The main result is that a ring pattern does occur on the upper surface provided that the density of the lower layer is greater than that of the upper one. The presented model may be of interest for geophysics to study large-scale ring structures on the Earth and other solid planets.

Keywords: Stokes flow, multi-layered flows, long-wave approximation, nonlinear diffusion, ring structures

Mathematical Subject Classifications: 76D50

Пак Владимир Васильевич,
Тихоокеанский океанологический институт ДВО РАН им. В. И. Ильичева,
690041, Владивосток, Балтийская 43
E-mail: pakvv@poi.dvo.ru