МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 2

УДК 517.977

© *И. Н. Шуравина*

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УКЛОНЕНИЯ В КОНУСЕ

Рассматривается линейная задача уклонения одного убегающего от группы преследователей, при условии, что игроки обладают равными динамическими возможностями, убегающий не покидает пределы выпуклого конуса. Доказывается, что если число преследователей меньше размерности пространства, то убегающий уклоняется от встречи на интервале $[0, \infty)$.

Ключевые слова: дифференциальные игры, групповое преследование, поимка, пример Понтрягина.

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = ax_i + u_i, \quad \|u_i\| \leqslant 1. \tag{1.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = ay + v, \quad \|v\| \leqslant 1. \tag{1.2}$$

Здесь $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, $a \in \mathbb{R}^1$. При $t = 0$ заданы начальные позиции преследователей $x_1^0, \ldots, x_n^0$ и убегающего y^0, причем $x_i^0 \neq y^0$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Предполагается, что убегающий E не покидает выпуклый конус

$$D = \{y : y \in \mathbb{R}^k, \quad (p_j, y) \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, r\},$$

где $p_1, \ldots, p_r$ — единичные векторы $\mathbb{R}^k$ такие, что $\operatorname{Int} D \neq \varnothing$, $y^0 \in \operatorname{Int} D$.

При $a = 0$ и отсутствии фазовых ограничений задача рассматривалась в [1], при $a = 0$ с фазовыми ограничениями задача рассматривалась в [2, 3]. При $a < 0$ и отсутствии фазовых ограничений задача рассматривалась в [4], при $a < 0, n \geqslant k$ с фазовыми ограничениями задача рассматривалась в [5]. В работе [6] доказано, что если $a < 0, n < k$ и убегающий не покидает пределы конуса, то в игре происходит уклонение от встречи в классе кусочно-программных стратегий. В данной работе аналогичный результат доказывается в случае $a > 0$.

Пусть σ — разбиение $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \ldots$ интервала $(0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения, $D_r(q)$ — шар радиуса r с центром в точке q.

Определение 1. *Кусочно-программной стратегией* V игрока E, заданной на $[0, \infty)$, соответствующей разбиению σ, называется семейство отображений $\{b^l\}_{l=0}^{\infty}$, ставящих в соответствие величинам

$$(t_l, x_1(t_l), \ldots, x_n(t_l), y(t_l))$$

измеримую функцию $v = v_l(t)$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$ и такую, что $\|v_l(t)\| \leqslant 1$, $y(t) \in D$, $t \in [t_l, t_{l+1})$.

Определение 2. Будем говорить, что в игре Γ происходит *уклонение от встречи*, если существуют разбиение σ, стратегия V игрока E, соответствующая σ такая, что для любых траекторий $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ выполнено $x_i(t) \neq y(t)$, $t \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, где $y(t)$ — реализовавшаяся траектория E.

§ 2. Построение стратегии уклонения

Лемма 1. *Пусть* $q \in \mathbb{R}^k$ *такое, что* $D_r(q) \subset D$. *Тогда для любого* $t > 0$ $D_{re^{at}}(qe^{at}) \subset D$.

Теорема 1. *Если* $a > 0$, $n < k$, *то в игре* Γ *происходит уклонение от встречи.*

Доказательство. Возьмем шар такой, что $D_r(q) \subset D$, $y^0 \in \operatorname{Int} D_r(q)$. Обозначим через ε расстояние от y^0 до границы $D_r(q)$.

1. Пусть $a\varepsilon \geqslant 1$.

Задаем разбиение σ интервала $(0, \infty)$ и стратегию V убегающего E, соответствующую данному разбиению, следующим образом: $\sigma = \{0, \infty\}$, $v(t) = v_0$, где v_0 определяется из условия $(v_0,\ y^0 - x_i^0) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, $(v_0,\ y^0 - q) \leqslant 0$, $\|v_0\| = 1$. Отметим, что v_0 всегда существует, так как $n < k$.

Покажем, что $y(t) \neq x_i(t)$ для всех $t \in [0, \infty)$. Имеем

$$y(t) = e^{at}y^0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} v_0 \, d\tau; \quad x_i(t) = e^{at}x_i^0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} u(\tau) \, d\tau.$$

Поэтому для $t \in [0, \infty)$ получим

$$\begin{aligned} \|y(t) - x_i(t)\| \geqslant \|e^{at}y^0 + M(t)v_0 - e^{at}x_i^0\| - M(t) = \\ = \sqrt{e^{2at}(y^0 - x_i^0)^2 + (M(t))^2} - M(t) > 0. \end{aligned}$$

Здесь $M(t) = \displaystyle\int_0^t e^{a(t-\tau)} \, d\tau$. Так как $y^0 \neq x_i^0$ для всех i, то доказано, что $y(t) \neq x_i(t)$ для всех i и всех t. Докажем для всех $t \geqslant 0$ неравенство

$$\|y(t) - e^{at}q\| \leqslant e^{at}r. \tag{2.1}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \|y(t) - e^{at}q\| = \|e^{at}y_0 - e^{at}q + \frac{e^{at}-1}{a}v_0\| \leqslant \\ \leqslant \sqrt{(e^{at}\|y_0 - q\|)^2 + \left(\frac{e^{at}-1}{a}\right)^2} \leqslant \sqrt{e^{2at}(r-\varepsilon)^2 + \left(\frac{e^{at}-1}{a}\right)^2}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Следовательно, для доказательства (2.1) достаточно доказать, что для всех $t > 0$ справедливо неравенство

$$\sqrt{e^{2at}(r-\varepsilon)^2 + \left(\frac{e^{at}-1}{a}\right)^2} \leqslant e^{at}r$$

или

$$\varepsilon^2 + e^{-2at}\left(\frac{e^{at}-1}{a}\right)^2 \leqslant 2r\varepsilon. \tag{2.3}$$

Так как $a\varepsilon \geqslant 1$, то для всех $t \geqslant 0$ справедливо неравенство $1 - e^{-at} \leqslant a\varepsilon$. Следовательно, $\dfrac{e^{-at}(e^{at}-1)}{a} \leqslant \varepsilon$ для всех $t \geqslant 0$.

Так как $\varepsilon \leqslant r$, то $\varepsilon \leqslant \sqrt{r\varepsilon}$ и мы получаем, что для всех $t \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$e^{-at}\left(\frac{e^{at}-1}{a}\right) \leqslant \sqrt{r\varepsilon}.$$

Отсюда

$$e^{-2at}\left(\frac{e^{at}-1}{a}\right)^2 \leqslant r\varepsilon. \tag{2.4}$$

Так как $\varepsilon^2 \leqslant r\varepsilon$, то из (2.4) следует неравенство:

$$\varepsilon^2 + e^{-2at}\left(\frac{e^{at}-1}{a}\right)^2 \leqslant 2r\varepsilon.$$

Тем самым (2.3), а следовательно, и неравенство (2.1) доказаны. Из (2.1) следует, что $y(t) \in D_r(q) \subset \operatorname{Int} D$ для всех $t \geqslant 0$. Значит, стратегия V является стратегией уклонения.

2. Пусть $a\varepsilon < 1$. Выберем $\tau_i = -\dfrac{1}{a}\ln\left(1-\dfrac{a\varepsilon}{i+1}\right)$. Отметим, что $\tau_i > 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\tau_i = \infty$.

Определим моменты t_i вида

$$t_0 = 0,\ t_1 = \tau_1,\ \ldots,\ t_{i+1} = t_i + \tau_i.$$

В качестве разбиения σ интервала $(0,\infty)$ возьмем разбиение $\{t_i\}_{i=0}^{\infty}$. Зададим стратегию V убегающего E следующим образом: $v(t) = v_j$, $t \in [t_j, t_{j+1})$, где v_j определяется из условий $(v_j,\ y(t_j) - x_i(t_j)) = 0$, $i = 1,\ldots,n$, $(v_j,\ y(t_j) - q) \leqslant 0$, $\|v_j\| = 1$.

Покажем, что $y(t) \neq x_i(t)$ для всех $t \in [0,\infty)$. Пусть $t \in [t_k, t_{k+1})$. Тогда

$$y(t) = e^{a(t-t_k)}y(t_k) + \int_{t_k}^{t} e^{a(t-\tau)}v_k\,d\tau;$$

$$x_i(t) = e^{a(t-t_k)}x_i(t_k) + \int_{t_k}^{t} e^{a(t-\tau)}u_k(\tau)\,d\tau.$$

Поэтому для $t \in [t_k, t_{k+1})$

$$\|y(t) - x_i(t)\| \geqslant \|e^{a(t-t_k)}y(t_k) + M_k(t)v_k - e^{a(t-t_k)}x_i(t_k)\| - M_k(t) =$$
$$= \sqrt{e^{2a(t-t_k)}(y(t_k) - x_i(t_k))^2 + (M_k(t))^2} - M_k(t) > M_k(t) - M_k(t) = 0.$$

Здесь $M_k(t) = \displaystyle\int_{t_k}^{t} e^{a(t-\tau)}\,d\tau$. Таким образом, если поимка не произошла до момента t_k, то она не произойдет и на интервале $[t_k, t_{k+1})$. А так как $y^0 \neq x_i^0$ для всех i, то доказано, что $y(t) \neq x_i(t)$ для всех i и всех t.

Покажем, что для всех $t \in [0, t_1]$ справедливо неравенство

$$\|y(t) - e^{at}q\| \leqslant e^{at}\left(r - \frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{2.5}$$

Из (2.2) следует, что достаточно доказать неравенство $\sqrt{e^{2at}(r-\varepsilon)^2 + \left(\dfrac{e^{at}-1}{a}\right)^2} \leqslant e^{at}\left(r - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, которое после несложных преобразований приводится к неравенству $\varepsilon^2 + \big((1-e^{-at})/a\big)^2 \leqslant r\varepsilon + (\varepsilon^2/4)$. Последнее неравенство справедливо, так как $\varepsilon^2 \leqslant r\varepsilon$ и $(1-e^{-at})/a \leqslant \varepsilon/2$ для всех $t \in [0, t_1]$, в силу выбора t_1. Тем самым неравенство (2.5) доказано.

Так как $D_{re^{at_1}}(e^{at_1}q) \subset D$, то расстояние от точки $y(t_1)$ до границы D не меньше, чем $e^{at_1}\dfrac{\varepsilon}{2}$ и, следовательно, не меньше $\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Выберем точку $\widetilde{q}_1$ такую, что $D_{\widetilde{q}_1}(r) \subset D$, $y(t_1) \in D_{\widetilde{q}_1}(r)$ и $\|y(t_1) - \widetilde{q}_1\| = r - \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Принимаем момент t_1 за начальный и полагаем $v(t) = v_1$, $t \in [t_1, t_2]$.

Докажем, что $\|y(t)-e^{at}\widetilde{q}_1\| \leqslant e^{at}\left(r-\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$ для всех $t \in [t_1, t_2]$.

$$\|y(t)-e^{at}\widetilde{q}_1\| =$$
$$= \|e^{at}y(t_1)-e^{at}\widetilde{q}_1+\frac{e^{at}-1}{a}v_1\| = \|e^{at}(y(t_1)-\widetilde{q}_1)+\frac{e^{at}-1}{a}v_1\| =$$
$$= \sqrt{e^{2at}(y(t_1)-\widetilde{q}_1)^2+2e^{at}\frac{e^{at}-1}{a}(y(t_1)-\widetilde{q}_1, v_1)+\left(\frac{e^{at}-1}{a}\right)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{e^{2at}\left(r-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{at}-1}{a}\right)^2} \leqslant e^{at}\sqrt{\left(r-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+\left(\frac{1-e^{-at}}{a}\right)^2} =$$
$$= e^{at}\sqrt{\left(r-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+\frac{\varepsilon^2}{9}} \leqslant e^{at}\left(r-\frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Тем самым требуемое неравенство доказано.

Продолжаем данный процесс далее по следующей схеме: принимаем момент t_{k-1} за начальный и полагаем $v(t)=v_{k-1}$, $t \in [t_{k-1}, t_k]$.

Таким образом получаем, что для всех $t \in [t_{k-1}, t_k]$

$$\|y(t)-e^{at}q\| \leqslant e^{at}\left(r-\frac{\varepsilon}{k+1}\right). \tag{2.6}$$

Из (2.6) следует, что $y(t) \in D_{re^{at}}(qe^{at}) \subset \operatorname{Int} D$ для всех $t \geqslant 0$.

Значит, стратегия V является стратегией уклонения. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пшеничный Б. Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. — 1976. — № 3. — С. 145–146.
2. Иванов Р. П. Простое преследование на компакте // ДАН СССР. — 1980. — Т. 254, № 6. — С. 1318–1321.
3. Петров Н. Н. Простое преследование при наличии фазовых ограничений / ЛГУ. — Л., 1984. — 16 с. — Деп. в ВИНИТИ 27.03.84, № 1684-84.
4. Пшеничный Б. Н., Раппопорт И. С. Об одной задаче группового преследования // Кибернетика. — 1979. — № 6. — С. 145–146.
5. Петров Н. Н. Одна задача группового преследования с фазовыми ограничениями // Нелин. колебания и теория упр. / УдГУ. — Ижевск, 1987. — С. 24–33.
6. Петров Н. Н. Одна линейная задача уклонения от многих преследователей // Известия РАН. Теория и системы управления. — 1998. — № 1. — С. 41–43.

Поступила в редакцию 04.07.08

I. N. Shuravina

About one problem of evasion in a cone

We consider a linear problem of evasion of one evador from the group of persecutors provided that players posess equal dynamic possibilities and evador does not leave a convex cone. It is proved, that if the number of persecutors is less then dimension of scape then the evador evades from a meeting on a positive semiaxis.

Keywords: differential games, group pursuit, capture, Pontryagin's example.

Mathematical Subject Classifications: 91A23, 49N75

Шуравина Ирина Николаевна,
аспирант, Удмуртский государственный университет,
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4)
E-mail: shuravina_in@mail.ru