МАТЕМАТИКА

УДК 517.977.8

© *А. И. Благодатских*

МНОГОКРАТНАЯ ПОИМКА В ПРИМЕРЕ ПОНТРЯГИНА[1]

Получены достаточные условия многократной поимки в примере Понтрягина с одинаковыми возможностями всех участников.

Ключевые слова: дифференциальные игры, групповое преследование, поимка, многократная поимка, пример Понтрягина.

Введение

Задача простого группового преследования с равными возможностями впервые рассматривалась Б. Н. Пшеничным [1], были получены необходимые и достаточные условия поимки. Для задачи с простыми движениями и равными возможностями Н. Л. Григоренко [2] были представлены необходимые и достаточные условия многократной поимки. Н. Н. Петров [3] получил достаточные условия многократной поимки в примере Л. С. Понтрягина с равными возможностями. В данной работе рассматривается обобщенный нестационарный пример Л. С. Понтрягина при одинаковых динамических и инерционных возможностях игроков, получены достаточные условия многократной и нестрогой одновременной многократной поимки, а для случая простых движений участников получены необходимые и достаточные условия одновременной многократной поимки. Управления преследователей, гарантирующие разрешимость указанных задач не позднее некоторого момента времени, построены в явном виде.

Многократная поимка происходит, если заданное количество преследователей ловят убегающего, при этом моменты поимки могут не совпадать. В задаче о нестрогой одновременной многократной поимке дополнительно к условиям задачи о многократной поимке требуется, чтобы моменты поимки (не обязательно наименьшие) совпадали. Наконец, в задаче об одновременной многократной поимке добавляется требование о том, чтобы совпадали наименьшие моменты поимки.

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^\nu$ $(\nu \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E с законами движения

$$x_i^{(l)} + a_1(t)x_i^{(l-1)} + a_2(t)x_i^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)x_i = u_i, \quad u_i \in V, \tag{1.1}$$

$$y^{(l)} + a_1(t)y^{(l-1)} + a_2(t)y^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)y = v, \quad v \in V, \tag{1.2}$$

соответственно и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$x_i^{(q)}(t_0) = X_i^q, \ \ y^{(q)}(t_0) = Y^q, \text{ причем } X_i^0 \neq Y^0 \text{ для всех } i, \tag{1.3}$$

здесь $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^\nu$, V — строго выпуклый компакт в $\mathbb{R}^\nu$ с гладкой границей такой, что $\operatorname{Int} V \neq \varnothing$, функции $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_l(t)$ непрерывны на промежутке $[t_0, \infty)$,

$$i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad q = 0, 1, \ldots, l-1.$$

[1]Работа поддержана грантом Президента РФ для молодых кандидатов наук (МК-2817.2008.1) и Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 06–01–00258, 09–01–00403).

Управления из класса измеримых по Лебегу на промежутке $[t_0, \infty)$ функций со значениями из V будем называть допустимыми. Для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ определим множество

$$\Omega(k) = \big\{(i_1, i_2, \ldots, i_k) : i_1, i_2, \ldots, i_k \in I \text{ попарно различны}\big\}.$$

Определение 1. *В игре* Γ *возможна* m*-кратная поимка* $(n \geqslant m \geqslant 1)$, если существует момент $T_1 = T_1(X_i^q, Y^q)$ такой, что для любого допустимого управления $v(t)$ найдутся допустимые управления

$$u_i(t) = u_i(t,\ X_i^q, Y^q,\ v(s),\ t_0 \leqslant s \leqslant t)$$

такие, что для некоторых $\tau_k \in [t_0, T_1]$ и $\Lambda \in \Omega(m)$ выполнено

$$x_k(\tau_k) = y(\tau_k) \text{ для всех } k \in \Lambda.$$

Определение 2. *В игре* Γ *возможна нестрогая одновременная* m*-кратная поимка*, если существует момент $T_2 = T_2(X_i^q, Y^q)$ такой, что для любого допустимого управления $v(t)$ найдутся допустимые управления

$$u_i(t) = u_i(t,\ X_i^q, Y^q,\ v(s),\ t_0 \leqslant s \leqslant t)$$

такие, что для некоторых $\tau \in [t_0, T_2]$ и $\Lambda \in \Omega(m)$ выполнено

$$x_k(\tau) = y(\tau) \text{ для всех } k \in \Lambda.$$

Определение 3. *В игре* Γ *возможна одновременная* m*-кратная поимка*, если существует момент $T_3 = T_3(X_i^q, Y^q)$ такой, что для любого допустимого управления $v(t)$ найдутся допустимые управления

$$u_i(t) = u_i(t,\ X_i^q, Y^q,\ v(s),\ t_0 \leqslant s \leqslant t)$$

такие, что для некоторых $\tau \in [t_0, T_3]$ и $\Lambda \in \Omega(m)$ выполнено

$$x_k(\tau) = y(\tau),\ x_k(s) \neq y(s) \text{ для всех } s \in [t_0, \tau),\ k \in \Lambda.$$

§ 2. Достаточные условия многократной поимки

Соотношения (1.1), (1.2), (1.3), вводя замены $z_i = x_i - y$, перепишем в виде

$$z_i^{(l)} + a_1(t) z_i^{(l-1)} + \ldots + a_l(t) z_i = u_i - v, \quad u_i, v \in V, \quad z_i^{(q)}(t_0) = Z_i^q = X_i^q - Y^q. \tag{2.1}$$

Через $\varphi_q(t, s)$ $(t \geqslant s \geqslant t_0)$ обозначим решение уравнения с начальными условиями

$$\omega^{(l)} + a_1(t)\omega^{(l-1)} + a_2(t)\omega^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)\omega = 0,$$

$$\omega(s) = 0,\ \ldots,\ \omega^{(q-1)}(s) = 0,\ \omega^{(q)}(s) = 1,\ \omega^{(q+1)}(s) = 0,\ \ldots,\ \omega^{(l-1)}(s) = 0.$$

Пусть далее

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t, t_0) Z_i^0 + \varphi_1(t, t_0) Z_i^1 + \ldots + \varphi_{l-1}(t, t_0) Z_i^{l-1}.$$

Предположение 1. Существуют непрерывные на промежутке $[t_0, \infty)$ функции $\alpha_i(t)$ и $\xi_i^1(t)$, обладающие следующими свойствами: 1) $\xi_i^1(t)$ являются почти периодическими в смысле Бора; 2) $\alpha_i(t) > 0$ для всех $t \geqslant t_0$; 3) $\lim\limits_{t \to \infty} (\xi_i^1(t) - \alpha_i(t)\xi_i(t)) = 0$.

Выражение «функция (определенная на $[t_0, \infty]$) является почти периодической в смысле Бора» означает, что ее можно доопределить при $t < t_0$ так, чтобы полученная функция стала почти периодической по Бору.

Предположение 2. Функции $\varphi_{l-1}(t,s)$ и $\alpha(t)=\min\limits_{i\in I}\alpha_i(t)$ таковы, что

$$\lim_{t\to\infty}\alpha(t)\int_{t_0}^{t}|\varphi_{l-1}(t,s)|\,ds=\infty.$$

Случай $m=1$, то есть простой поимки, в предположениях 1, 2 рассматривался в [6].

Условие 1. Существуют моменты $\tau_1^0,\tau_2^0,\ldots,\tau_n^0\in[t_0,\infty)$ такие, что

$$0\in\operatorname{Intco}\{\xi_k^1(\tau_k^0),\ k\in K\}\ \text{для всех множеств}\ K\in\Omega(n-m-1).$$

Через $D(c,r)$ обозначим замкнутый шар с центром в точке c радиуса r.

Лемма 1. *Пусть выполнены предположение* 1 *и условие* 1. *Тогда существуют такие числа* $\varepsilon_1>0$ *и* $\Delta_1>0$, *для которых справедливы утверждения*: 1) *для всех* $K\in\Omega(n-m-1)$ *и* $h_i\in D(\xi_i^1(\tau_i^0),\varepsilon_1)$ *выполнено включение* $0\in\operatorname{Intco}\{h_k,\ k\in K\}$; 2) *для всех* $t\geqslant t_0$ *найдутся моменты* $\tau_i\in[t,t+\Delta_1)$ *такие, что* $\alpha_i(\tau_i)\xi_i(\tau_i)\in D(\xi_i^1(\tau_i^0),\varepsilon_1)$.

Доказательство. Выберем произвольное множество $K\in\Omega(n-m-1)$. Множество $\operatorname{co}\{\xi_k^1(\tau_k^0),\ k\in K\}$ является выпуклым многогранником с вершинами в точках $\xi_p^1(\tau_p^0)$, где $p\in P\subset K$. Из условия 1 следует, что $0\in\operatorname{Intco}\{\xi_p^1(\tau_p^0),\ p\in P\}$. Так как множество $\operatorname{Intco}\{\xi_p^1(\tau_p^0),\ p\in P\}$ является открытым, то найдется число $\varepsilon_1>0$ такое, что $0\in\operatorname{Intco}\{h_p,\ p\in P\}$ для любых $h_p\in D(\xi_p^1(\tau_p^0),\varepsilon_1)$. Из последнего включения, учитывая, что $\operatorname{Intco}\{h_p,\ p\in P\}\subset\operatorname{Intco}\{h_k,\ k\in K\}$, следует справедливость утверждения 1) данной леммы.

В силу предположения 1 функции $\xi_i^1(t)$ являются почти периодическими по Бору, поэтому найдется $T(\varepsilon_1)>0$, для которого выполнено следующее утверждение: для всех $t\geqslant t_0$ существуют такие $\tau_i^1\in[t,t+T(\varepsilon_1))$, что $\xi_i^1(\tau_i^1)\in D(\xi_i^1(\tau_i^0),\varepsilon_1/2)$. Из приведенного утверждения и свойства 3) предположения 1 следует, что при некотором $\Delta_1=\Delta_1(\varepsilon_1)>0$ утверждение 2) выполняется. $\square$

Выберем значения $\varepsilon_1>0$ и $\Delta_1>0$ так, чтобы имели место утверждения леммы 1.

Определим функции ψ, λ, Q_i равенствами

$$\psi(t,s)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad \varphi_{l-1}(t,s)\geqslant 0,\\ -1 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$$\lambda(v,\psi,h)=\sup\{\lambda:\ \lambda\geqslant 0,\ (v-\lambda\psi h)\in V\},\quad Q_i(t,h)=\alpha_i(t)\int_{t_0}^{t}|\varphi_{l-1}(t,s)|\lambda(v(s),\psi(t,s),h)\,ds.$$

Введем обозначения

$$d=(h_1,h_2,\ldots,h_n),\quad d^*=(h_1^*,h_2^*,\ldots,h_n^*),\quad D_1=D(\xi_1^1(\tau_1^0),\varepsilon_1)\times D(\xi_2^1(\tau_2^0),\varepsilon_1)\times\ldots\times D(\xi_n^1(\tau_n^0),\varepsilon_1),$$

$$\delta_1=\min_{d\in D_1}\ \min_{\psi\in\{1,-1\}}\ \min_{v\in V}\ \max_{\Lambda\in\Omega(m)}\ \min_{k\in K}\lambda(v,\psi,h_k).$$

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* 1. *Тогда* $\delta_1>0$.

Доказательство. Зафиксируем любой набор $d\in D_1$. Пусть

$$\delta_1^+(d)=\min_{v\in V}\ \max_{\Lambda\in\Omega(m)}\ \min_{k\in\Lambda}\lambda(v,+1,h_k),\qquad \delta_1^-(d)=\min_{v\in V}\ \max_{\Lambda\in\Omega(m)}\ \min_{k\in\Lambda}\lambda(v,-1,h_k).$$

Из условий леммы следует справедливость утверждения 1) леммы 1, поэтому

$$0\in\operatorname{Intco}\{h_k,\ k\in K\}\ \big(0\in\operatorname{Intco}\{-h_k,\ k\in K\}\big)\ \text{для всех множеств}\ K\in\Omega(n-m-1).$$

Предположим, что $\delta_{+1}(d) = 0$ $\big(\delta_{-1}(d) = 0\big)$. Тогда найдется $w \in V$ такой, что в любом множестве $\Lambda \in \Omega(m)$ существует элемент $p \in \Lambda$, для которого $\lambda(w, +1, h_p) = 0$ $\big(\lambda(w, -1, h_p) = 0\big)$. Построим множество $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_{n-m+1}\} \in \Omega(n-m+1)$ по следующему правилу. Выберем $q_1 \in L_1 = \{1, 2, \ldots, m\} \in \Omega(m)$ из условия $\lambda(w, +1, h_{q_1}) = 0$ $\big(\lambda(w, -1, h_{q_1}) = 0\big)$, затем $q_2 \in L_2 = (L_1 \bigcup \{m+1\}) \setminus \{q_1\} \in \Omega(m)$ такой, что $\lambda(w, +1, h_{q_2}) = 0$ $\big(\lambda(w, -1, h_{q_2}) = 0\big)$, и так далее. На последнем шаге построим множество $L_{n-m+1} = (L_{n-m} \bigcup \{n\}) \setminus \{q_{n-m}\} \in \Omega(m)$ и выберем элемент $q_{n-m+1} \in L_{n-m+1}$ по условию $\lambda(w, +1, h_{q_{n-m+1}}) = 0$ $\big(\lambda(w, -1, h_{q_{n-m+1}}) = 0\big)$. По построению множество $Q \in \Omega(n-m+1)$ такое, что

$$\min_{v \in V} \max_{q \in Q} \lambda(v, +1, h_q) = 0 \quad \big(\min_{v \in V} \max_{q \in Q} \lambda(v, +1, h_q) = 0\big),$$

откуда следует, что $0 \notin \operatorname{Intco}\{h_q,\ q \in Q\}$ $\big(0 \notin \operatorname{Intco}\{-h_q,\ q \in Q\}\big)$. Полученное противоречие доказывает, что

$$\delta_1^+(d) > 0 \quad \big(\delta_1^-(d) > 0\big).$$

В работе А. А. Чикрия [4] доказана непрерывность функции λ на каждом из множеств $V \times \{\pm 1\} \times D(\xi_i^1(\tau_i^0), \varepsilon_1)$, откуда вытекают равенства

$$\lim_{d^* \to d} \delta_1^{\pm}(d^*) = \lim_{d^* \to d} \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{k \in \Lambda} \lambda(v, \pm 1, h_k^*) = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{k \in \Lambda} \lambda(v, \pm 1, h_k) = \delta_1^{\pm}(d),$$

где $d^* \in D_1$, следовательно, функции $\delta_1^{\pm}$ являются непрерывными на D_1. Учитывая еще, что множество D_1 — компакт, получаем соотношения $\delta_1 = \min\limits_{d \in D_1} \{\delta_1^+(d), \delta_1^-(d)\} > 0$. $\square$

Лемма 3. *Пусть выполнены предположения* 1, 2 *и условие* 1. *Тогда существует такой момент* $T > t_0$, *что для каждых допустимого управления* $v(t)$ *и* $d \in D_1$ *найдется такое множество* $\Lambda \in \Omega(m)$, *что* $Q_k(T, h_k) \geqslant 1$ *для всех* $k \in \Lambda$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеют место неравенства

$$\max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{k \in \Lambda} Q_k(t, h_k) = \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{k \in \Lambda} \alpha_k(t) \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t, s)| \lambda(v(s), \psi(t, s), h_k)\, ds \geqslant$$

$$\geqslant \alpha(t) \frac{1}{C_n^m} \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t, s)| \sum_{\Lambda \in \Omega(m)} \Big(\min_{k \in \Lambda} \lambda(v(s), \psi(t, s), h_k)\Big) ds \geqslant \alpha(t) \frac{\delta_1}{C_n^m} \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t, s)|\, ds.$$

Таким образом, в силу предположения 2, для момента T такого, что

$$\alpha(T) \frac{\delta_1}{C_n^m} \int_{t_0}^{T} |\varphi_{l-1}(T, s)|\, ds \geqslant 1,$$

и некоторого $\Lambda \in \Omega(m)$ выполнены неравенства $Q_k(T, h_k) \geqslant 1$ для всех $k \in \Lambda$. $\square$

Пусть

$$\theta_1 = \min\{t \geqslant t_0 : \inf_{v(\cdot)} \min_{d \in D_1} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{k \in \Lambda} Q_k(t, h_k) \geqslant 1\}.$$

Из леммы 3 следует, что $\theta_1 < \infty$.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* 1, 2 *и условие* 1. *Тогда в игре* Γ *возможна* m*-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле Коши для всех $t \geqslant t_0$ решение задачи (2.1) при любых допустимых управлениях имеет вид

$$z_i(t) = \xi_i(t) + \int_{t_0}^{t} \varphi_{l-1}(t, s)(u_i(s) - v(s))\, ds.$$

Пусть $v(\tau)$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant T_1 = \theta_1 + \Delta_1$ — произвольное допустимое управление убегающего E и $t_i \geqslant t_0$ — наименьший корень функции

$$F_i(t) = 1 - \alpha_i(\tau_i) \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(\tau_i, s)| \lambda(v(s), \psi(\tau_i, s), \alpha_i(\tau_i)\xi_i(\tau_i))\, ds,$$

где $\tau_i \in [\theta_1, T_1) = [\theta_1, \theta_1 + \Delta_1)$ выбраны так, чтобы выполнялось утверждение 2) леммы 1, то есть $\alpha_i(\tau_i)\xi_i(\tau_i) \in D(\xi_i^1(\tau_i^0), \varepsilon_1)$. В силу определения момента θ_1 имеем

$$\min_{\Lambda \in \Omega(m)} \max_{k \in \Lambda} F_k(\theta_1) = 1 - \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{k \in \Lambda} Q_k(\theta_1, \alpha_k(\tau_k)\xi_k(\tau_k)) \leqslant 0,$$

значит, найдется множество $\Lambda_0 \in \Omega(m)$ такое, что $t_k \leqslant \theta_1 \leqslant \tau_k$ для всех $k \in \Lambda_0$.

Зададим управление преследователей P_i следующим образом:

$$u_i(t) = \begin{cases} v(t) - \lambda(v(t), \psi(\tau_i, t), \alpha_i(\tau_i)\xi_i(\tau_i))\psi(\tau_i, t)\alpha_i(\tau_i)\xi_i(\tau_i), \ t \in [t_0, t_i^*], \\ v(t), \ t \in (t_i^*, T_1], \ \text{где } t_i^* = \min\{t_i, \tau_i\}. \end{cases}$$

Тогда

$$z_k(\tau_k) = \xi_k(\tau_k)\left(1 - \alpha_k(\tau_k) \int_{t_0}^{t_k} |\varphi_{l-1}(\tau_k, s)| \lambda(v(s), \psi(\tau_k, s), \alpha_k(\tau_k)\xi_k(\tau_k)) ds\right) = \xi_k(\tau_k) F_k(t_k) = 0$$

для всех $k \in \Lambda_0$. □

Предположение 3. Функции $\xi_i(t)$ являются почти периодическими в смысле Бора, и $\varphi_{l-1}(t, s)$ такова, что

$$\lim_{t \to \infty} \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t, s)|\, ds = \infty.$$

Условие 2. Существуют моменты $\tau_1^0, \tau_2^0, \ldots, \tau_n^0 \in [t_0, \infty)$ такие, что

$$0 \in \mathrm{Intco}\{\xi_k(\tau_k^0), \ k \in K\} \text{ для всех множеств } K \in \Omega(n - m - 1).$$

Следствие 1. *Пусть выполнены предположение* 3 *и условие* 2. *Тогда в игре* Γ *возможна* m*-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая $\alpha_i(t) = 1$, $\xi_i^1(t) = \xi_i(t)$, получаем выполнимость всех условий теоремы 1. □

Замечание 1. Предположения 1, 2, 3 выполнены, в частности, если $a_{q+1}(t)$ являются постоянными функциями, то есть $a_{q+1}(t) = a_{q+1}$ для всех $t \in [t_0, \infty)$, и все корни ρ уравнения

$$\rho^l + a_1\rho^{l-1} + a_2\rho^{l-2} + \ldots + a_l\rho = 0 \tag{2.2}$$

являются простыми и чисто мнимыми.

Следствие 2. *Пусть функции* $a_{q+1}(t)$ *являются постоянными, все корни* ρ *уравнения* (2.2) *являются простыми и чисто мнимыми, выполнено условие* 2. *Тогда в игре* Γ *возможна* m*-кратная поимка.*

Теорема 2. *Пусть функции* $a_{q+1}(t)$ *являются постоянными, все корни* ρ *уравнения* (2.2) *являются простыми и чисто мнимыми,* $n \geqslant \nu = 2$. *Тогда в игре* Γ *возможна* $(n-1)$*-кратная поимка из любых начальных позиций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n = 2$ утверждение теоремы доказано [5]. Пусть утверждение выполнено при всех $n \leqslant n_0$. Докажем, что при $n = n_0 + 1$ в игре Γ возможна n_0-кратная поимка из любых начальных позиций. В силу индуктивного предположения преследователи P_k, $k = 1, 2, \ldots, n_0$, осуществляют $(n_0 - 1)$-кратную поимку. Затем оставшиеся (не осуществившие поимку) два преследователя P_j, где $j \in \{1, 2, \ldots, n_0\}$, и P_{n_0+1} могут поймать убегающего. Таким образом, все преследователи осуществляют n_0-кратную поимку. □

§ 3. Достаточные условия нестрогой одновременной многократной поимки

Условие 3. Существует момент τ_0 такой, что

$$0 \in \operatorname{Intco}\{\xi_k^1(\tau_0),\ k \in K\} \text{ для всех множеств } K \in \Omega(n-m-1).$$

Лемма 4. *Пусть выполнены предположение* 1 *и условие* 3. *Тогда существуют такие числа* $\varepsilon_2 > 0$ *и* $\Delta_2 > 0$, *для которых справедливы утверждения*: 1) *для всех* $K \in \Omega(n-m-1)$ *и* $h_i \in D(\xi_i^1(\tau_0), \varepsilon_2)$ *выполнено включение* $0 \in \operatorname{Intco}\{h_k,\ k \in K\}$; 2) *для всех* $t \geqslant t_0$ *найдется момент* $\tau \in [t, t+\Delta_2)$, *что* $\alpha_i(\tau)\xi_i(\tau) \in D(\xi_i^1(\tau_0), \varepsilon_2)$.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1. Выберем значения $\varepsilon_2 > 0$ и $\Delta_2 > 0$ так, чтобы имели место утверждения леммы 4. Введем обозначения

$$D_2 = D(\xi_1^1(\tau_0), \varepsilon_2) \times D(\xi_2^1(\tau_0), \varepsilon_2) \times \ldots \times D(\xi_n^1(\tau_0), \varepsilon_2),$$

$$\delta_2 = \min_{d \in D_2} \min_{\psi \in \{1,-1\}} \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{k \in K} \lambda(v, \psi, h_k).$$

Лемма 5. *Пусть выполнено условие* 3. *Тогда* $\delta_2 > 0$.

Лемма 6. *Пусть выполнены предположения* 1, 2 *и условие* 3. *Тогда существует такой момент* $T > t_0$, *что для каждых допустимого управления* $v(t)$ *и* $d \in D_2$ *найдется такое множество* $\Lambda \in \Omega(m)$, *что* $Q_k(T, h_k) \geqslant 1$ *для всех* $k \in \Lambda$.

Доказательство лемм 5, 6 проводится аналогично доказательству лемм 2, 3 соответственно. Пусть

$$\theta_2 = \min\{t \geqslant t_0 : \inf_{v(\cdot)} \min_{d \in D_2} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{k \in \Lambda} Q_k(t, h_k) \geqslant 1\}.$$

Из леммы 6 следует, что $\theta_2 < \infty$.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения* 1, 2 *и условие* 3. *Тогда в игре* Γ *возможна нестрогая одновременная* m*-кратная поимка.*

Доказательство. По формуле Коши для всех $t \geqslant t_0$ решение задачи (2.1) при любых допустимых управлениях имеет вид

$$z_i(t) = \xi_i(t) + \int_{t_0}^{t} \varphi_{l-1}(t,s)(u_i(s) - v(s))\, ds.$$

Пусть $v(\tau)$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant T_2 = \theta_2 + \Delta_2$ — произвольное допустимое управление убегающего E и $t_i \geqslant t_0$ — наименьший корень функции

$$F_i(t) = 1 - \alpha_i(\tau) \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(\tau,s)| \lambda(v(s), \psi(\tau,s), \alpha_i(\tau)\xi_i(\tau))\, ds,$$

где $\tau \in [\theta_2, T_2) = [\theta_2, \theta_2 + \Delta_2)$ выбран так, чтобы выполнялось утверждение 2) леммы 4, то есть $\alpha_i(\tau)\xi_i(\tau) \in D(\xi_i^1(\tau_0), \varepsilon_2)$. В силу определения момента θ_2 имеем

$$\min_{\Lambda \in \Omega(m)} \max_{k \in \Lambda} F_k(\theta_2) = 1 - \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{k \in \Lambda} Q_k(\theta_1, \alpha_k(\tau)\xi_k(\tau)) \leqslant 0,$$

значит, найдется множество $\Lambda_0 \in \Omega(m)$, что $t_k \leqslant \theta_2 \leqslant \tau$ для всех $k \in \Lambda_0$.

Зададим управление преследователей P_i следующим образом:

$$u_i(t) = \begin{cases} v(t) - \lambda(v(t), \psi(\tau,t), \alpha_i(\tau)\xi_i(\tau))\psi(\tau,t)\alpha_i(\tau)\xi_i(\tau), & t \in [t_0, t_i^*], \\ v(t), \ t \in (t_i^*, T_2], \text{ где } t_i^* = \min\{t_i, \tau\}. \end{cases}$$

Тогда

$$z_k(\tau)=\xi_k(\tau)\left(1-\alpha_k(\tau)\int_{t_0}^{t_k}|\varphi_{l-1}(\tau,s)|\lambda(v(s),\psi(\tau,s),\alpha_k(\tau)\xi_k(\tau))\,ds\right)=\xi_k(\tau)F_k(t_k)=0$$

для всех $k\in\Lambda_0$. □

Условие 4. Существует момент τ_0 такой, что

$$0\in\mathrm{Intco}\{\xi_k(\tau_0),\ k\in K\}\ \text{для всех множеств}\ K\in\Omega(n-m-1).$$

Следствие 3. *Пусть выполнены предположение* 3 *и условие* 4. *Тогда в игре* Γ *возможна нестрогая одновременная* m*-кратная поимка.*

Доказательство. Полагая $\alpha_i(t)=1$, $\xi_i^1(t)=\xi_i(t)$, получаем выполнимость всех условий теоремы 3. □

Условие 5. Начальные позиции участников таковы, что

$$0\in\mathrm{Intco}\{Z_k^0,\ k\in K\}\ \text{для всех множеств}\ K\in\Omega(n-m-1).$$

Следствие 4. *Пусть выполнены предположение* 3 *и условие* 5. *Тогда в игре* Γ *возможна нестрогая одновременная* m*-кратная поимка.*

Доказательство. Пусть $\tau_0=t_0$, тогда $\xi_i(\tau_0)=\xi_i(t_0)=Z_i^0$ и условие 4 выполнено. Применим следствие 3. □

Следствие 5. *Пусть функции* $a_{q+1}(t)$ *являются постоянными, все корни* ρ *уравнения* (2.2) *являются простыми и чисто мнимыми, выполнено условие* 4 *или условие* 5. *Тогда в игре* Γ *возможна нестрогая одновременная* m*-кратная поимка.*

§ 4. Необходимые и достаточные условия одновременной многократной поимки

Теорема 4 (см. [7]). *Пусть* $l=1$, $a_1(t)=0$. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная* m*-кратная поимка тогда и только тогда, когда выполнено условие* 5.

§ 5. Примеры

Пример 1. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру Γ_1 6 лиц: преследователей $P_1,\dots,P_5$ и убегающего E вида (1.1), (1.2), (1.3), где соотношения (2.1) имеют вид

$$\ddot z_i+z_i=u_i-v,$$

$$t_0=0,\quad Z^0=Z_i^0=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad Z^1=Z_i^1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad i=1,\dots,5.$$

Тогда корни уравнения (2.2), имеющего вид

$$\rho^2+1=0,$$

равны $\pm\iota$ (ι — мнимая единица) и предположения 1, 2, 3 выполнены. Здесь

$$\varphi_0(t,0)=\cos t,\quad \varphi_1(t,0)=\sin t,\quad \xi_i(t)=Z^0\cos t+Z^1\sin t.$$

Отметим, что условие 3, а следовательно, и полученные в этой работе достаточные условия нестрогой одновременной m-кратной поимки не выполнены уже при $m=1$, так как при любых $\alpha_i(t)>0$

$$\mathrm{Intco}\{\alpha_i(t)\xi_i(t),\ i=1,\dots,5\}=\varnothing\ \text{для всех}\ t\in[0,\infty).$$

Условие 2 выполнено, например, выберем $\tau_i^0 = \frac{2\pi i}{5}$, тогда

$$\xi_i(\tau_i^0) = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi i}{5} \\ \sin\frac{2\pi i}{5} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, 5,$$

образуют правильный пятиугольник с центром в начале координат. Проверяя, получаем, что условие 2 выполнено при $m = 2$. Следствие 2 влечет возможность двукратной поимки в игре Γ_1. Но из теоремы 2 следует более сильное

Утверждение 1. *В игре Γ_1 возможна четырехкратная поимка.*

Пример 2. В $\mathbb{R}^\nu$ $(\nu \geqslant 2)$ рассмотрим игру Γ_2 $n+1$ лиц: преследователей $P_1, \dots, P_n$ и убегающего E вида (1.1), (1.2), (1.3), где соотношения (2.1) имеют вид

$$z_i^{(6)} + 14 z_i^{(4)} + 49 \ddot{z}_i + 36 z_i = u_i - v.$$

Тогда корни уравнения (2.2), имеющего вид

$$\rho^6 + 14\rho^4 + 49\rho^2 + 36 = 0,$$

равны $\pm\iota$, $\pm 2\iota$, $\pm 3\iota$ и предположения 1, 2, 3 выполнены.

Утверждение 2. 1) *Если выполнено условие* 3 *или условие* 4, *или условие* 5, *то в игре* Γ_2 *возможна нестрогая одновременная* m*-кратная поимка;* 2) *если выполнено условие* 1 *или условие* 2, *то в игре* Γ_2 *возможна* m*-кратная поимка;* 3) *если* $n \geqslant \nu = 2$, *то в игре* Γ_2 *возможна* $(n-1)$*-кратная поимка из любых начальных позиций.*

Пример 3. В $\mathbb{R}^\nu$ $(\nu \geqslant 2)$ рассмотрим игру Γ_3 $n+1$ лиц: преследователей $P_1, \dots, P_n$ и убегающего E вида (1.1), (1.2), (1.3), где соотношения (2.1) имеют вид

$$\dot{z}_i + \frac{\sin t}{2 + \cos t} z_i = u_i - v.$$

Тогда

$$\varphi_0(t, s) = \frac{2 + \cos t}{2 + \cos s}, \quad \xi_i(t) = \frac{2 + \cos t}{2 + \cos t_0} Z_i^0$$

и предположения 1, 2, 3 выполнены.

Утверждение 3. *Если выполнено условие* 5, *то в игре* Γ_3 *возможна нестрогая одновременная* m*-кратная поимка.*

Пример 4. В $\mathbb{R}^\nu$ $(\nu \geqslant 2)$ рассмотрим игру Γ_4 $n+1$ лиц: преследователей $P_1, \dots, P_n$ и убегающего E вида (1.1), (1.2), (1.3), где соотношения (2.1) имеют вид

$$\dot{z}_i + \Big(\frac{1}{t} + \frac{\sin t}{2 + \cos t}\Big) z_i = u_i - v, \quad t_0 > 0.$$

Тогда

$$\varphi_0(t, s) = \frac{s(2 + \cos t)}{t(2 + \cos s)}, \quad \xi_i(t) = \frac{t_0(2 + \cos t)}{t(2 + \cos t_0)} Z_i^0,$$

$$\alpha(t) = \alpha_i(t) = t, \quad \xi_i^1(t) = \frac{t_0}{2 + \cos t_0}(2 + \cos t) Z_i^0$$

и предположения 1, 2 выполнены. Отметим, что предположение 3 не выполнено. В качестве τ_0 в условии 3 возьмем t_0, тогда $\xi_i^1(\tau_0) = \xi_i^1(t_0) = t_0 Z_i^0$.

Утверждение 4. *Если начальные позиции участников таковы, что выполнено условие* 5, *то в игре* Γ_4 *возможна нестрогая одновременная* m*-кратная поимка.*

Пример 5. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру Γ_5 6 лиц: преследователей $P_1, \ldots, P_5$ и убегающего E вида (1.1), (1.2), (1.3), где соотношения (2.1) имеют вид

$$\dot{z}_i = u_i - v, \quad t_0 = 0,$$

$$X_i^0 = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi i}{5} \\ \sin \frac{2\pi i}{5} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, 5, \quad Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что начальные позиции преследователей образуют правильный пятиугольник с центром в начальной позиции убегающего. Проверяя, получаем, что при $m \leqslant 2$ условие 1 выполнено, а при $m \geqslant 3$ не выполнено.

Утверждение 5. *В игре Γ_5 возможна одновременная двукратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна.*

Пример 6. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру Γ_6 8 лиц: преследователей $P_1, \ldots, P_7$ и убегающего E вида (1.1), (1.2), (1.3), где соотношения (2.1) имеют вид

$$\dot{z}_i = u_i - v, \quad t_0 = 0,$$

$$X_i^0 = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi i}{7} \\ \sin \frac{2\pi i}{7} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, 7, \quad Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Утверждение 6. *В игре Γ_6 возможна одновременная трехкратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна.*

Обобщая результаты игр Γ_5 и Γ_6, рассмотрим следующий пример.

Пример 7. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру Γ_7 $2+2m$ лиц: преследователей $P_1, \ldots, P_{1+2m}$ и убегающего E вида (1.1), (1.2), (1.3), где соотношения (2.1) имеют вид

$$\dot{z}_i = u_i - v, \quad t_0 = 0,$$

$$X_i^0 = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi i}{1+2m} \\ \sin \frac{2\pi i}{1+2m} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, 1+2m, \quad Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Утверждение 7. *В игре Γ_7 возможна одновременная m-кратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна.*

Пример 8. В $\mathbb{R}^3$ рассмотрим игру Γ_8 $2+3m$ лиц: преследователей $P_1, \ldots, P_{1+3m}$ и убегающего E вида (1.1), (1.2), (1.3), где соотношения (2.1) имеют вид

$$\dot{z}_i = u_i - v, \quad t_0 = 0,$$

$$X_i^0 = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi i}{1+2m} \\ \sin \frac{2\pi i}{1+2m} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, 1+2m, \quad X_k^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad k = 2+2m, \ldots, 1+3m, \quad Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Утверждение 8. *В игре Γ_8 возможна одновременная m-кратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна.*

МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пшеничный Б. Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. — 1976. — № 3. — С. 145–146.
2. Григоренко Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. — 197 с.
3. Петров Н. Н. Многократная поимка в примере Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. — 1997. — Т. 61, вып. 5. — С. 747–754.
4. Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. — Киев: Наук. думка, 1992. — 380 с.
5. Благодатских А. И. О двух колебательных конфликтно управляемых процессах со многими участниками // Известия ин-та математики и информатики. — Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 2005. — № 2. — С. 3–22.
6. Благодатских А. И. Групповое преследование в нестационарном примере Л. С. Понтрягина // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44, № 1. — С. 39–44.
7. Благодатских А. И. Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования // Прикладная математика и механика. — 2009. — Т. 73, № 1. — С. 54–59.

Поступила в редакцию 10.10.08

A. I. Blagodatskikh

Multiple capture in a Pontriagin's problem

Sufficient conditions are obtained for the multiple capture in Pontriagin's problem with equal possibilities for all players.

Keywords: differential games, group pursuit, capture, multiple capture, Pontriagin's problem.

Mathematical Subject Classifications: 34A30, 49J15, 91A23

Благодатских Александр Иванович,
к. ф.-м. н., доцент кафедры дифференциальных уравнений,
Удмуртский государственный университет,
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4)
E-mail: aiblag@mail.ru