УДК 519.254

© *Т. М. Спичкина*

НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ ВЫЧИСЛЕНИЯ СВЕРТКИ

Предложены три модели вычисления свертки: основанная на нахождении решения некоторой линейной алгебраической системы; содержащая сдвиги; основанная на билинейных формах. Приведена вычислительная эффективность этих моделей по сравнению с имеющимися моделями.

Ключевые слова: свертка, число отсчетов сигнала.

Введение

Эффективность вычисления свертки для конкретной задачи зависит от выбранной модели. Существует множество таких моделей, отличающихся друг от друга, в том числе, числом отсчетов сигнала. Универсальных моделей значительно меньше, и их вычислительные затраты по-прежнему высоки. В работе предложены три универсальные модели, первые две дают вычислительную выгоду относительно имеющихся универсальных моделей.

Линейная алгебраическая система

Пусть y — свертка функции $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ с импульсной характеристикой $h = (h_0, h_1, \ldots, h_{n-1})$ является решением некоторой алгебраической системы $Ay = b$. Будем выбирать систему таким образом, чтобы вычислительные затраты были минимальны. Это возможно достичь в случаях, когда при решении системы проводятся операции с числами ± 1, ± 0.5, ± 2, так как в этих случаях операции умножения фактически не выполняются. Данным условиям удовлетворяет система с матрицей $A = (a_{ij})_0^{n-1}$ и вектором $b = (b_j)_0^{n-1}$, где при $i = \overline{0, n-1}, j = \overline{0, n-1}$

$$a_{ij} = 1 - 2(1 - \delta_{i0})\delta_{ij} \quad (\delta_{ij} \text{ — символ Кронекера}),$$

$$b_j = \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1} h_i\right)\delta_{0j} + \sum_{i=0}^{n-1}\left(x_i\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{\delta_{(i+k) \bmod n, j}} h_k\right)\right)(1 - \delta_{0j}).$$

Оценка числа умножений при решении системы методом Гаусса дает нулевое число существенных умножений. Составляется система за $k = n^2 - n + 1$ умножений, то есть на вычисление свертки требуется k умножений.

Сдвиги

Применяем только операцию сдвига. Для этого число 2 возводится в степень свертки:

$$2^{y_k} = 2^{\sum\limits_{i=0}^{n-1} x_{k-i}h_i} = \prod_{i=0}^{n-1} 2^{x_{k-i}h_i} = \prod_{i=0}^{n-1} (2^{x_{k-i}})^{h_i}.$$

Результатом этой процедуры является число вида 2^B, где B — искомая свертка. Количество сдвигов в данном методе может быть оценено числом

$$n\left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i + \sum_{i=0}^{n-1} h_i + \max_{i,j=\overline{0,n-1}} x_i h_j\right).$$

Билинейные формы

Представим свертку в виде билинейной формы $y_k = xS_kh$, где S_k — симметрическая матрица. Тогда при каждом $k = \overline{0, n-1}$ элементы матриц S_k будут иметь вид:

$$s_{mi}^k = \begin{cases} 1, & \text{если } m = (k-i) \bmod n, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad m = \overline{0, n-1}, i = \overline{0, n-1}.$$

Матрица S_k может быть приведена к каноническому виду в поле вещественных чисел методом ортогональных преобразований или методом Лагранжа. При этом число умножений не изменится относительно вычисления свертки по определению. Свертка является скалярным произведением функций x и h, а S_k — весовой функцией. Отметим, что в данном случае метод Якоби не применим.

Поступила в редакцию 08.02.08

T. M. Spichkina
Some models of convolution calculation

For calculation of convolution three models are offered: based on a finding the solution of some linear algebraic system; containing shifts; based on bilinear forms. Computing efficiency of these models is given in comparison with the available models.

Спичкина Татьяна Михайловна
Ижевский государственный
технический университет
426069, Россия, г. Ижевск,
ул. Студенческая, 7 (корп. 6)
E-mail: dspich@mail.ru