ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ 2008. Вып. 2

УДК 519.712 : 510.25 : 510.67

© ***Н. И. Калядин***

КОНСТРУКТИВИЗАЦИЯ В КЛАССИФИКАЦИИ ОБРАЗОВ

Изучаются проблемы разрешимости и вычислимости, предопределяющие концепцию конструктивизации в задачах классификации образов.

Ключевые слова: разрешимость, вычислимость, классификация образов, конструктивизация.

Введение

Конструктивизация — одна из основных и пока нерешенных проблем фундаментальной и прикладной науки.

В настоящей статье рассматриваются проблемы разрешимости и вычислимости в классификации образов. Сформулированные критерии разрешимости определяют условия конструктивизации в описании образов, гарантирующие с учетом мер сложности (компактность, параллелизм, симультанность, автоматная реализуемость) эффективную вычислимость предикатов классификации.

§ 1. О проблемах в классификации образов

Рассматривается множество $M = \bigcup\limits_{i=1}^{k} M_i$ классифицируемых (распознаваемых) образов (конечных объектов) x произвольной природы.

Первым шагом при *конструктивизации* является формализация исходного описания образа $x \in M$ для перехода от физической или *семантической* модели к математической.

Для этого с помощью подходящей *редукции* $\varphi : M \to N \rightleftharpoons \{0, 1, 2, \ldots\}$ осуществляется переход (*кодирование*) к натуральным числам. Дальнейшая формализация выполняется на единой алгоритмической основе — теории *рекурсивных функций* [4].

Пусть $\varphi : M \to \Phi$, где Φ — семейство всех конечных подмножеств множества натуральных чисел N; $\langle M, \varphi \rangle$ — множество конструктивных объектов; $O \rightleftharpoons \{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_m\}$ — обучающая выборка известных реализаций (описаний) $\mathfrak{X}_i$, $i \in \mathfrak{I}_m \rightleftharpoons \{1, 2, \ldots, m\}$ образа x; $\mathfrak{X}$ — неизвестная реализация образа x; $S \rightleftharpoons \{\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_t\}$ — разбиение обучающей выборки на классы (эталоны) $\mathfrak{N}_j$, $j \in \mathfrak{I}_t \rightleftharpoons \{1, 2, \ldots, t\}$; $f : \mathfrak{I}_m \to \mathfrak{I}_t$ — классифицирующая функция, закрепляющая номера $i \in \mathfrak{I}_m$ элементов обучающей выборки $\mathfrak{X}_i \in O$ за номерами эталонов-классов $\mathfrak{N}_j \in S$, $j \in \mathfrak{I}_t$.

Тогда известные [1] в теории распознавания (классификации) задачи конструктивизируются на *языке расширенного исчисления предикатов* следующим образом [2, с. 8].

1. *Распознавание:*

$$(\forall x \in M)[x \in \mathfrak{X}] = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathfrak{X}; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

2. *Идентификация:*

$$(\forall x \in O)[\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i] = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i,\ i \in \mathfrak{I}_m; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

3. *Классификация:*

$$(\forall x \in O)[\mathfrak{X} \in \mathfrak{N}_j] = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathfrak{X} \in \mathfrak{N}_j,\ j \in \mathfrak{I}_t; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Без потери общности ограничимся рассмотрением проблем разрешимости и вычислимости задач классификации.

Проблема разрешимости: существует ли алгоритм, определяющий принадлежность неизвестной реализации $\mathfrak{X}$ образа x одному из классов разбиения $\mathfrak{N}_j$, то есть вычисляющий предикат $P(\bar{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle)$, где $\bar{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ — набор признаков в описании образа.

Проблема вычислимости — установление эффективной процедуры вычислений разрешимых предикатов классификации $P(\bar{x})$.

Проблемы вычислимости и разрешимости тесно связаны [3, с. 30]: предикат $P(\bar{x})$ разрешим, если функция $c_p(\bar{x})$ вычислима; предикат $P(\bar{x})$ неразрешим, если функция $c_p(\bar{x})$ невычислима, где $P(\bar{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle)$ n-местный предикат на натуральных числах; $c_p(\bar{x})$ — характеристическая функция:

$$c_p(\bar{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } P(\bar{x}) \text{ истинно,} \\ 0, & \text{если } P(\bar{x}) \text{ ложно.} \end{cases}$$

Определения разрешимости и вычислимости, рассматриваемые в данной работе, применимы к функциям и предикатам от натуральных чисел. Но это не является существенным ограничением, поскольку операции, включающие другие виды объектов, могут быть закодированы как операции с натуральными числами [3, с. 31].

§ 2. Критерии (не)разрешимости задач классификации

Вопрос о существовании алгоритма, указывающего номер i класса $\mathfrak{N}_i \in S$, для которого предикат $P_i(\mathfrak{X}) = 1$, назовем *задачей классификации* для разбиения $S \rightleftharpoons \{\mathfrak{N}_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ семейства $\mathfrak{M} \subseteq \Phi$, $\mathfrak{I}$ — не более чем счетное индексное множество; $P_i(\mathfrak{X}) = 1 \dot{-} \chi_{A_i}(\gamma^{-1}(\mathfrak{X}))$, где χ_{A_i} — характеристическая функция множества $A_i \rightleftharpoons \gamma^{-1}(\mathfrak{N}_i)$, $\gamma : N \to \Phi$ — стандартная нумерация множества Φ [2, с. 22].

Изучение часто встречающихся в приложениях семейств конечных объектов, наделенных вычислимыми однозначными нумерациями, позволяет выделить случаи *(не)разрешимости* в задачах классификации.

Теорема 1 (критерий разрешимости 1 [2, с. 23]). *Задача классификации для разбиения $S \rightleftharpoons \{\mathfrak{N}_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ семейства $\mathfrak{M}$ разрешима тогда и только тогда, когда $\mathfrak{I}$ конечно и для всякого $i \in \mathfrak{I}$ $[\mathfrak{N}_i$ — сильно рекурсивно$]$.*

Теорема 2 (критерий разрешимости 2 [2, с. 23]). *Если задача классификации для разбиения $S \rightleftharpoons \{\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_r\}$ семейства $\mathfrak{M}$ разрешима,*

$$B \rightleftharpoons \{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_r\}$$

— такое разбиение семейства $\mathfrak{L}$, что для любого $i \leqslant r \in N$ $[\gamma^{-1}(\mathfrak{A}_i)$ — прообраз стандартной нумерации элементов разбиения B m-сводится к прообразу $\gamma^{-1}(\mathfrak{N}_i)$ стандартной нумерации элементов разбиения S, то есть $\gamma^{-1}(\mathfrak{A}_i) \leqslant_m \gamma^{-1}(\mathfrak{N}_i)]$, то проблема классификации для разбиения B семейства $\mathfrak{L}$ разрешима.

Теорема 3 (критерий неразрешимости 1 [2, с. 26]). *Пусть множество конструктивных объектов $\langle M, \varphi\rangle$ таково, что $\varphi(M)$ рекурсивно перечислимо, но не рекурсивно. Тогда ни для одного конечного разбиения $R \rightleftharpoons \{M_1, M_2, \ldots, M_m\}$ множества M задача классификации для тройки $\langle M, R, \varphi\rangle$ неразрешима.*

Теорема 4 (критерий неразрешимости 2 [2, с. 28, 31]). *Пусть отображение $\Delta : M \to \Phi$ коммутативно, то есть $\Delta = \gamma\varphi$. Тогда если $\Delta(M)$ — сильно (квазисильно) перечислимо, но не сильно (квазисильно) рекурсивно, то ни для какого конечного разбиения $R \rightleftharpoons \{M_1, M_2, \ldots, M_m\}$ множества M задача классификации для тройки $\langle M, R, \Delta\rangle$ неразрешима.*

При неразрешимости модели классификации m-сводимость предопределяет *критерий регуляризации* в смысле эффективной вычислимости для указания путей расширения свойств конструктивизируемых объектов или усиления *рекурсивности* алгоритмов классификации.

Анализ [2, с. 32–35] однозначной разрешимости моделей типовых игровых решающих правил позволил сформулировать условия существования и единственности решений в моделях классификации с предельно коротким (*однотактным или симультанным*) циклом принятия решений.

Теорема 5 (о существовании информативных элементов [2, с. 37]). *Пусть* $(\forall i \in \mathfrak{I}_l)$ $[\mathfrak{X}_i \neq \varnothing]$ *и* $(\forall i \neq j \in \mathfrak{I}_l)$ $[q_{ij} = 1 \Rightarrow q_{ji} = 0]$. *Тогда существует* l *информативных элементов* $a_i \in V_i^{l+1}$ *таких, что предикат классификации*

$$\theta_i(\mathfrak{X}) = \lceil a_i \in \mathfrak{X} \rceil \ \& \ \neg \left[\bigvee_{j \in \mathfrak{I}_l \setminus \{i\}} \lceil a_j \in \mathfrak{X} \rceil \ \& \ q_{ij} \right]$$

обращается в «единицу» тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i$, *где* $\mathfrak{X} \in O_0 \rightleftharpoons \{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_l\}$ — *обучающая выборка; индексные множества, получаемые по рекуррентной схеме:*

$$V_i^{j+1} = \begin{cases} V_i^j \setminus \mathfrak{X}_j, & \textit{если } V_i^j \setminus \mathfrak{X}_j \neq \varnothing; \ (i,\, j) = \overline{1, l}, \\ V_i^j, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

q_{ij} — *элементы логической матрицы* $q = \|q_{ij}\|$:

$$q_{ij} = \begin{cases} 0, & \textit{если } V_i^j \setminus \mathfrak{X}_j \neq \varnothing; \\ 1, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Указанные критерии разрешимости позволяют ответить на вопросы эффективной вычислимости конструктивизируемых объектов с помощью подходящей нумерации.

§ 3. Вычислимость в задачах классификации

Построение быстрых алгоритмов классификации является актуальным и может представлять самостоятельный интерес [2].

Нахождение предельно быстрого разрешимого предиката классификации $P(\mathfrak{X}, \mathfrak{N}_j) = [\mathfrak{X} \in \mathfrak{N}_j]$ сводится к параллельному вычислению системы частных предикатов равенства (идентификации) [2, с. 42]:

$$P(\mathfrak{X}, \mathfrak{N}_j) = \bigvee_{i \in D_j} [\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i],$$

где $D_j = \{i | f(i) = j\}$, $j = \overline{1, t}$ — множество номеров эталонных классов (объектов) $\mathfrak{X}_i$.

Общий алгоритм вычисления разрешимого предиката классификации $P(\mathfrak{X}, \mathfrak{N}_j)$ предельно быстро, то есть за один такт принятия решения о принадлежности неизвестной реализации $\mathfrak{X}$ к одному из классов эквивалентности $\mathfrak{N}_j$ сводится к следующему [2, с. 40]: предъявленное множество $\mathfrak{X}$ сравнивается с каждым классом из разбиений множества $\mathfrak{M}$ и далее, вычислив номер i, для которого $\lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i \rceil = u$, присваиваем значение

«u» предикату $P(\mathfrak{X}, \mathfrak{N}_{f(i)})$. В силу того, что если $S \rightleftharpoons \{\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_t\}$ — разбиение множества $\mathfrak{M}$, то $(\forall j \in \mathfrak{I}_i \backslash \{i\})[P(\mathfrak{X}, \mathfrak{N}_j) = u\ ]$, $f(i) = j$.

В целях упрощения и ускорения вычислений предиката равенства $\lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i \rceil$ укажем условия симультанности в принятии решений.

Теорема 6 (см. [2, с. 45]). *Пусть* $\mathfrak{M} \rightleftharpoons \{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_m\}$ *— множество подмножеств из* Φ*, для которых выполняется условие* $\|q_{ij}\|_{m\times m} = E_{m\times m}$*. Тогда* $(\forall i \in \mathfrak{I}_m)\left(\forall a_i \in V_i^{m+1}\right)(\forall \mathfrak{X} \in \mathfrak{M})$ *предикаты равенства и принадлежности совпадают:* $\lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i \rceil = \lceil a_i \in \mathfrak{X} \rceil$.

Теорема 6 показывает, что единичность логической матрицы $\|q_{ij}\|_{m\times m}$ делает возможным упрощенное вычисление предиката равенства посредством вычисления предиката принадлежности элемента («идентификационной метки») информативной зоны соответствующему множеству.

Теорема 7 (см. [2, с. 45]). *Пусть* $(\forall i \in \mathfrak{I}_m)$ $[\mathfrak{X}_i \neq \varnothing]$ $(\forall i \neq j \in \mathfrak{I}_m)$ $[q_{ij} = \neg q_{ji}]$. *Тогда существует* m *информативных элементов («идентификационных меток»)* $a_i \in V_i^{m+1}$ *таких, что предикат:*

$$\lceil a_i \in \mathfrak{X} \rceil \ \& \ \neg \left[\bigvee_{j \in \mathfrak{I}_m \backslash \{i\}} (\lceil a_j \in \mathfrak{X} \rceil \ \& \ q_{ij}) \right] = \lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i \rceil .$$

Теорема 8 (см. [2, с. 45]). *Если выполнено условие* $\|q_{ij}\|_{m\times m} = E_{m\times m}$, *тогда существует* m *информативных элементов из информативных зон* $a_i \in V_i^{m+1}$ *таких, что предикат*

$$\lceil \bar{u} = \bar{u}_i \rceil = \begin{cases} 1, \textit{если } \ a_i = u_j; \\ 0, \textit{в противном случае,} \end{cases}$$

где индекс j *выбирается из условия* $a_i = x_{ij}$, $\bar{u}_i = \langle x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in} \rangle$, $i = \overline{1, m}$, *то есть вектора размерности* n *и* $U_i^1 = \langle \mathfrak{X}_{i1}, \mathfrak{X}_{i2}, \ldots, \mathfrak{X}_{in} \rangle$.

Условия симультанности (теоремы 6, 7, 8) показывают, что для того чтобы получить предельно короткий (однотактный или симультанный) способ принятия решения при классификации, необходимо и достаточно сравнить параллельно по всем кортежам обучающей выборки только по одному информативному значению каждого признака.

При рассмотрении задачи классификации конструктивных множеств по классам эквивалентности выделены два подхода в построении эффективных алгоритмов: первый подход основан на формировании эталонов в виде одного информативного элемента из каждого множества; второй подход — на алгоритме эталонирования путем пересечения множеств в поисках эффективных решающих правил и условий их существования.

Заключение

1. Полученные результаты разрешимости и вычислимости на моделях классификации определяют пути последующей реализуемости схем классификации.

2. Сформулированный конструктивный подход позволил успешно решить ряд прикладных задач классификации, считающихся традиционно трудными для неконструктивных методов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев Ю. И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1978. Вып. 33. С. 5–69.
2. Калядин Н. И. Конструктивизация моделей классификации конечных объектов // Известия института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 2007. Вып. 1(38). С. 3–231.
3. Катленд Н. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций / Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 256 с.
4. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость / Пер. с англ. М.: Мир, 1972. 624 с.

Поступила в редакцию 25. 02. 08

N. I. Kalyadin
Constructivization in pattern recognition

The problems of solvability and computability are investigated, which define the concept of constructivization in pattern recognition problem.

Калядин Николай Иванович
Ижевский государственный
технический университет
426076, Россия, г. Ижевск,
ул. Студенческая, 7
E-mail: pmi@istu.mat.com