ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МЕХАНИКА 2008. Вып. 2

УДК 536.421.4:532.781

© *И. М. Цун*

РЕШЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА ДЛЯ ТЕРМИЧЕСКИ ТОНКОГО ЦИЛИНДРА

Сравниваются последствия двух допущений о форме фронта кристаллизации термически тонкого цилиндра.

Ключевые слова: динамическая задача Стефана, экструдирование расплавленного металла, фронт кристаллизации, термически тонкий цилиндр, длина участка кристаллизации.

Экструдирование расплавленного металла с последующей кристаллизацией в математической физике формализуется динамической задачей Стефана. В этом процессе капиллярную струю диаметром 0,2÷3 мм направляют в охлаждающую среду. В литературе имеются два допущения о форме фронта кристаллизации цилиндра: плоской и двумерной осесимметричной поверхностях фронта.

Н. Р. Берманом и другими авторами [1] рассматривалась кристаллизация цилиндра диаметром 5 ÷ 30 мкм, движущаяся со скоростью до 8 м/с. Фронт кристаллизации при этом был аксиоматизирован как плоскость, перпендикулярная оси цилиндра. В источниках указывается (см., например, [2]) на значительную грубость этого допущения. Так, Ш. Кэвеш [2] определял металлографическим методом направление нормали к фронту кристаллизации в цинковой литой проволоке диаметром 267 мкм, полученной экструдированием расплава в воду. У поверхности угол между нормалью и осью проволоки составлял 79°. Таким образом, фронт кристаллизации следует считать двумерным, что и предполагаем.

Пусть диск толщиной $\triangle l$ переместится совместно с цилиндром на величину $\triangle z = v\,\triangle\tau$ в направлении движения, где v — скорость движения, $\triangle\tau$ — время. При этом в диске за счет кристаллизации кольца толщиной $\triangle r$ выделяется количество тепла $\triangle Q = -\triangle H_{\text{пл}}\, 2\pi r\,\triangle r\,\triangle l\,\rho_{\text{ж}}$, а потери тепла составят $\triangle Q = q\,2\pi r_{\text{в}}\,\triangle l\,\triangle\tau$, где $\triangle H_{\text{пл}}$ — теплота кристаллизации, q — удельный тепловой поток с внешней поверхности, r — текущий радиус фронта кристаллизации, $r_{\text{в}} = r_1\sqrt{(r/r_1)^2 + [1-(r/r_1)^2]\,(\rho_{\text{ж}}/\rho_{\text{т}})}$ — текущий внешний радиус кристаллизирующегося жидкого цилиндра, r_1 — начальный радиус жидкого цилиндра, $\rho_{\text{ж}}$, $\rho_{\text{т}}$ — плотности металла в жидком и твердом состояниях. Приравнивая два выражения для $\triangle Q$ и переходя к пределу при $\triangle\tau \to 0$, получим уравнение, описывающее продвижение фронта кристаллизации по сечению цилиндра:

$$\frac{dR}{d\tau} = -\frac{2\,q}{\rho_{\text{ж}}\;\triangle H_{\text{пл}}\;d_1}\sqrt{1+\frac{1-R^2}{R^2}\,\Omega}, \quad \text{где} \quad R = r/r_1,\ \Omega = \rho_{\text{ж}}/\rho_{\text{т}},\ d_1 = 2\,r_1.$$

В результате замены $\frac{dR}{d\tau} = \frac{dR}{dz} \cdot \frac{dz}{d\tau} = v \frac{dR}{dz}$ получаем дифференциальное уравнение фронта кристаллизации

$$\frac{dR}{dz} = -\frac{2\,q}{v\ \rho_{\text{ж}}\ \triangle H_{\text{пл}}\ d_1} \sqrt{1 + \frac{1-R^2}{R^2}\,\Omega},$$

решение которого с краевым условием $R\,|_{z=0} = 1$ задает вид поверхности, образующей фронт кристаллизации

$$Z_d = \frac{2}{N_q\,(1-\Omega)}\,[1 - \sqrt{R^2(1-\Omega)+\Omega}],$$

где $Z_d = z/d_1$, $N_q = 4\,q/(v\ \rho_{\text{ж}}\ \triangle H_{\text{пл}})$.

Длина участка кристаллизации $L_{\text{к}} = \frac{l_{\text{к}}}{d_1} = Z_d\,|_{R=0} = \frac{2}{N_q\,(1+\Omega^{0.5})}$.

Для случая $\rho_{\text{ж}} = \rho_{\text{т}}$ (то есть $\Omega = 1$) следует, что $Z_d = \frac{1}{N_q}\,(1-R^2)$.

Следовательно, фронт кристаллизации имеет форму, близкую к параболоиду вращения, и тем он ближе к указанной форме, чем меньше изменение плотности при кристаллизации. Учитывая пределы изменения входящих в него величин, получаем, что $N_q \sim (10^{-2} \div 10^{-5})$. Соответственно $L_{\text{к}} \sim (10^2 \div 10^5)$. Иными словами, длина участка кристаллизации составляет от 100 до 100 000 диаметров цилиндра вдоль оси.

Таким образом, анализ двух взаимоисключающих допущений о форме фронта кристаллизации в термически тонком цилиндре при математическом моделировании показал, что допущение о двумерном фронте кристаллизации даёт более близкие к реальности результаты.

* * *

1. Бадинтер Е. Я, Берман Н. Р, Драбенко И. Ф и др. Литой микропровод и его свойства. Кишинев: Штиинца, 1973.
2. Kavesh Sh. Melt spinning of metal fibers // American Institute of Chemical Engineers. Symposium Series. 1978. Vol. 74, № 180. P. 1–15.

Поступила в редакцию 08.02.08

I. M. Tsoun

Solutions and mathematical modeling of Stefan's dynamical problem for a thermically thin cylinder

The consequences are compared of two assumptions about the crystallization front form of a thermically thin cylinder.

Цун Иосиф Менделевич
Магнитогорский государственный университет
455038, Россия, г. Магнитогорск,
пр. Ленина, 114, МаГУ
E-mail: tsoun@masu.ru