УДК 517.929

© *К. М. Чудинов*

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОНОМНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Получены критерии существования экспоненциальных оценок фундаментальной матрицы и матрицы Коши автономного функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение нейтрального типа, фундаментальное решение, матрица Коши, устойчивость.

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t)-\sum_{i=1}^{k}A_i(S_h^i\dot{x})(t)-\sum_{j=0}^{m}B_j(S_h^jx)(t)=f(t),\quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $A_i, B_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (вещественные $n\times n$-матрицы), S_h^i — i-я итерация оператора S_h, определенного для фиксированного $h>0$ равенством

$$(S_hy)(t)=\begin{cases}y(t-h), & t-h\geqslant 0,\\ 0, & t-h<0.\end{cases}$$

Как известно [1, с. 84], асимптотические свойства решений уравнения (1) определяются двумя матрица-функциями: *фундаментальной матрицей* $X\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^{n\times n}$ и *матрицей Коши* $C\colon \mathbb{R}_+^2\to\mathbb{R}^{n\times n}$.

Приведем критерии существования экспоненциальных оценок норм значений $X(t)$ и $C(t,s)$ в терминах корней явно определенных функций комплексной переменной.

Определим следующие матрицы-функции комплексной переменной z:

$$P_A(z)=I-\sum_{i=1}^{k}A_iz^i,\quad P_B(z)=\sum_{j=0}^{m}B_jz^j,\quad F(z)=\exp\left(P_A^{-1}(z)P_B(z)h\right),$$

где I — единичная $n\times n$-матрица, z^i — i-я степень переменной $z\in\mathbb{C}$.

Пусть для всех $i,j=1,\dots,n$ матрица $P(i,j)(z)$ получается заменой i-го столбца матрицы $P_A(z)$ j-м столбцом матрицы $P_B(z)$. Обозначим символом $\delta(z)$ наибольший общий делитель следующих (n^2+1) многочленов: $\det P_A(z)$ и $\det P(i,j)(z)$, $i,j=1,\dots,n$.

Теорема 1. *Неравенство*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln\|X(t)\|}{t} < 0$$

имеет место в том и только в том случае, если многочлен $\det P_A(z)/\delta(z)$ *и уравнение* $zF(z) = I$ *не имеют корней, принадлежащих*

$$D = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leqslant 1\}.$$

Теорема 2. *Неравенство*

$$\overline{\lim_{t-s\to\infty}} \frac{\ln\|C(t,s)\|}{t-s} < 0$$

имеет место в том и только в том случае, если многочлен $\det P_A(z)$ *и уравнение* $zF(z) = I$ *не имеют корней, принадлежащих* D.

В случае $n = 1$ полученные результаты переходят в теоремы об устойчивости скалярного уравнения, приведенные в работе [2].

* * *

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
2. Баландин А. С., Малыгина В. В. Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Известия вузов. Математика. 2007. №7 (542). С. 3–13.

Поступила в редакцию 14. 02. 08

K. M. Chudinov
On the exponential stability of an autonomous neutral equation

The necessary and sufficient conditions for the fundamental and Cauchy matrices of the autonomous neutral functional differential equation to have the exponential estimate are presented.

Чудинов Кирилл Михайлович
Пермский государственный
технический университет
614000, Россия, г. Пермь,
Комсомольский проспект, 29а
E-mail: cyril@list.ru