УДК 517.972.8

© *А. Г. Ченцов*

ПРОСТРАНСТВО СТОУНОВСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И КОНСТРУКЦИИ РАСШИРЕНИЙ [1]

Рассматриваются абстрактные задачи о достижимости с ограничениями асимптотического характера. Для них конструируются расширения в пространстве стоуновского представления, которое порождено ультрафильтрами фиксированной алгебры множеств пространства обычных решений. Исследуются вопросы структуры множества допустимых обобщенных элементов в связи с возможной несовместностью задачи в классе точных решений.

Ключевые слова: расширение, стоуновское представление, ультрафильтр.

Рассматривается абстрактная задача о достижимости в топологическом пространстве (ТП) $(\mathbf{H}, \tau)$ с ограничениями асимптотического характера, определяемыми непустым семейством $\mathcal{E}$ подмножеств (п/м) непустого множества E, именуемого пространством решений; $\mathbf{H}$ именуем пространством оценок. Задан (целевой) оператор $\mathbf{h}: E \to \mathbf{H}$. Определяем (несеквенциальное) множество притяжения (МП) в $(\mathbf{H}, \tau)$, привлекая ультрафильтры (у/ф) множества E:

$$(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \{z \in \mathbf{H} \,|\, \exists\, \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{o}[E|\,\mathcal{E}] : \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} z\}. \tag{1}$$

В (1) обозначения соответствуют [1]: $\stackrel{\tau}{\Rightarrow}$ обозначает сходимость баз фильтров [2, гл. I] в $(\mathbf{H}, \tau)$; при $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, где $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ — множество всех у/ф E, $\mathbf{h}^1[\mathcal{F}]$ есть семейство всех $\mathbf{h}-$ образов множеств из $\mathcal{F}$;

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{o}[E\,|\,\mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \,|\, \mathcal{E} \subset \mathcal{F}\}$$

есть множество всех $\mathcal{E}-$ допустимых у/ф множества E. Если $x \in E$, то $(E-\mathrm{ult})[x]$ определяем как семейство всех множеств G, $G \subset E$, таких, что $x \in G$; $(E-\mathrm{ult})[x] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ — тривиальный у/ф, соответствующий x. Для МП (1) имеются эквивалентные представления в классе всех фильтров E и в классе направленностей в E. Класс последовательностей в E не является, вообще говоря, достаточным для представления МП (1); см. [3].

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 06-01-00414, 07-01-96088).

Пусть E оснащено алгеброй $\mathcal{L}$ п/м E. Рассматриваем фильтры и у/ф $\mathcal{L}$ в качестве обобщенных элементов (ОЭ) в задаче о построении МП; через $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$ обозначаем множество всех у/ф $\mathcal{L}$, а через Φ мультифункцию из $\mathcal{L}$ в $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$, для которой $\Phi(L) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{F} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \,|\, L \in \mathcal{F}\}$.

Семейство $\mathbf{L} \stackrel{\triangle}{=} \{\Phi(L) : L \in \mathcal{L}\}$ — база топологии нульмерного компакта

$$\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}), \tau_\Phi\big) \tag{2}$$

и одновременно семейство всех открыто-замкнутых п/м $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$. Имеем $\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{Ult}\big)[x] \stackrel{\triangle}{=} (E - \mathrm{ult})[x] \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$ (тривиальный у/ф $\mathcal{L}$). Множество $\Big\{\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{Ult}\big)[x] :\ x \in E\Big\}$ всюду плотно в компакте (2), а

$$\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}\,|\,\mathcal{E}) \stackrel{\triangle}{=} \{\,\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})|\,\mathcal{E} \subset \mathcal{U}\,\} = \bigcap_{L\in\mathcal{E}} \Phi(L), \tag{3}$$

где (здесь и ниже) $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$, есть компакт в смысле τ_Φ. Справедливо равенство $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{U} \cap \mathcal{L} : \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]\}$, связывающее пространство стоуновского представления (см. (2)) и волмэновское расширение дискрета E (E в дискретной топологии). Если $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$, то $\mathcal{U}$ — база фильтра E, а $\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]$ (семейство всех $\mathbf{h}-$ образов множеств из $\mathcal{U}$) есть база фильтра в $\mathbf{H}$; всегда

$$(\tau - \mathbb{AS})[\mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \{y \in \mathbf{H} \,|\, \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}|\,\mathcal{E}) :\, \mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} y\} \subset (\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}]. \tag{4}$$

Через $\mathbb{F}_{oo}^*(\mathcal{L})$ обозначаем множество всех $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$ таких, что пересечение всех множеств из $\mathcal{U}$ пусто. Тогда $\mathbb{F}_{oo}^*(\mathcal{L})$ и множество

$$T_{\mathcal{L}} \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{Ult}\big)[x] :\, x \in E\Big\}$$

образуют разбиение $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$; множества

$$\mathbb{F}_{oo}^*(\mathcal{L}|\,\mathcal{E}) \stackrel{\triangle}{=} \big\{\,\mathcal{U} \in \mathbb{F}_{oo}^*(\mathcal{L})|\,\mathcal{E} \subset \mathcal{U}\big\}, \quad T_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}) \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{Ult}\big)[x] :\, x \in \bigcap_{U\in\mathcal{E}} U\Big\}$$

реализуют разбиение $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}|\,\mathcal{E}) = \big\{\mathcal{U} \cap \mathcal{L} \,:\, \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^o[E\,|\,\mathcal{E}]\big\}$ (3). Последнее свойство означает, в частности, что

$$\Big(\bigcap_{U\in\mathcal{E}} U = \emptyset\Big) \Longrightarrow \big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}|\,\mathcal{E}) = \mathbb{F}_{oo}^*(\mathcal{L}|\,\mathcal{E}) \subset \mathbb{F}_{oo}^*(\mathcal{L})\big). \tag{5}$$

Смысл (5) состоит в следующем: при отсутствии точных обычных решений среди допустимых ОЭ отсутствуют какие-либо обычные решения (точки E) вообще. Свойство, подобное (5), может отсутствовать в других конструкциях расширений.

П р и м е р 1. Рассмотрим «скалярную» управляемую систему

$$\dot{x} = u - 2, \quad |u| \leqslant 1,$$

функционирующую на отрезке $I \stackrel{\triangle}{=} [0,2]$, $x(0) = 2$; управляющие функции на I отождествляем с константами из $P \stackrel{\triangle}{=} [-1,1]$. Каждому $u \in P$ сопоставляем движение X_u на I, $X_u(t) = 2 + (u-2)t$. Задаем мультифункцию M из I в $\mathbb{R}$: $M(t) \stackrel{\triangle}{=} \{0\}$ $\forall t \in I \setminus \{1\}$, $M(1) \stackrel{\triangle}{=} \{0\} \cup [1, \infty[$. Через ϑ_u обозначаем первый момент $t \in I$, когда $X_u(t) \in M(t)$; $u \in P$. Тогда $\vartheta_1 = 1$,

$$\vartheta_u = \frac{2}{2-u} \quad \forall u \in [-1, 1[.$$

Пусть $E = P$, $\mathcal{E}$ — семейство всех множеств $E_\partial[\varepsilon] \stackrel{\triangle}{=} \{u \in P \,|\, 2 - \varepsilon < \vartheta_u\}$, $\varepsilon > 0$. Рассматриваем P как компакт в обычной $|\cdot|-$ топологии; погружение E (без оснащения) в P осуществляет тождественное отображение $p(u) \stackrel{\triangle}{=} u$. Тогда P есть (одновременно) множество ОЭ, а множество $\mathbb{A}$, определяемое в виде пересечения всех множеств $\overline{E_\partial(\varepsilon)}$, $\varepsilon > 0$, совпадает с $\{1\}$ (черта сверху означает замыкание), где $u = 1$ не является точным решением, так как $\vartheta_1 \neq 2$; здесь $\mathbb{A}$ есть МП в пространстве ОЭ.

Полагаем далее ТП $(\mathbf{H}, \tau)$ хаусдорфовым и постулируем, что для всех $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_\mathbf{u}[E]$ и всех $y \in \mathbf{H}$

$$\big(\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Rightarrow} y\big) \Longleftrightarrow \big(\mathbf{h}^1[\mathcal{U} \cap \mathcal{L}] \stackrel{\tau}{\Rightarrow} y\big). \tag{6}$$

Тогда $(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] = (\tau - \mathbb{AS})[\mathcal{E}]$ (у/ф $\mathcal{L}$ достаточны для реализации всего МП). Пусть, кроме того, $(\mathbf{H}, \tau)$ компактно. Тогда $\forall$ $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$ $\exists!$ $y \in \mathbf{H}$: $\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Rightarrow} y$. Поэтому определяем $\mathfrak{H}_\mathcal{L}[\tau] : \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \to \mathbf{H}$ условием: $\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Rightarrow} \mathfrak{H}_\mathcal{L}[\tau](\mathcal{U})$. Из (4) вытекает, что

$$(\tau - \mathbb{AS})[\mathcal{E}] = \{\mathfrak{H}_\mathcal{L}[\tau](\mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathbf{F}_o^*(\mathcal{L}|\,\mathcal{E})\},$$

причем оператор $\mathfrak{H}_\mathcal{L}[\tau]$ непрерывен в смысле τ_Φ, τ. Более того, кортеж $\Big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}), \tau_\Phi, \big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{Ult}\big)[\cdot], \mathfrak{H}_\mathcal{L}[\tau]\Big)$ — компактификатор [1, с. 236], реализующий МП $(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}]$ в виде непрерывного образа компакта $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}\,|\mathcal{E})$. Известны две различных конкретизации основного условия (см. (6)):
1) конкретизация [3, §4, 5], использующая ярусный вариант $\mathbf{h}$; 2) ослабленный вариант «локальной» измеримости $\mathbf{h}$ (постулируется, что для всякого $z \in \mathbf{H}$ существует локальная база β_z ТП $(\mathbf{H}, \tau)$ в точке z, для которой $\mathbf{h}^{-1}(B) \in \mathcal{L}$ $\forall B \in \beta_z$).

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

Отметим, что конструкции расширений задач управления использовались в работах Дж. Варги, Р. В. Гамкрелидзе, В. И. Гурмана, А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова, Н. Н. Красовского и А. И. Субботина (отметим применение ОЭ в связи со свойством стабильности мостов в теории дифференциальных игр, предложенным Н. Н. Красовским).

* * *

1. Ченцов А. Г. Несеквенциальные приближенные решения в абстрактных задачах управления // Труды Института математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2006. Т. 12. № 1. С. 216–241.
2. Бурбаки Н. Общая топология. М.: Наука, 1968. 272 с.
3. Ченцов А. Г. Конструирование операций предельного перехода с использованием ультрафильтров измеримых пространств // Автоматика и телемеханика. 2007. № 11. С. 208–221.

Поступила в редакцию 20. 01. 08

A. G. Chentsov

The space of Stone representation and constructions of extensions

The construction of abstract control problem extension is considered. The general properties of nonsequential (generally speaking) attraction sets are investigated. Generalized elements are defined as ultrafilters of the measurable space with an algebra of sets.

Ченцов Александр Георгиевич
Институт математики
и механики УрО РАН
Россия, Екатеринбург,
ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: chentsov@imm.uran.ru