ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.929/.534

© *В. З. Цалюк*

W-МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ (с вычислительными аспектами) [1]

Приведены обзор последних результатов, связанных с применением W-метода для решения и исследования квадратичных вариационных задач; сообщение о разработке программного пакета, предназначенного для производства точных вычислений, связанных с этими задачами; примеры прикладных задач.

Ключевые слова: квадратичная вариационная задача, экстремальная задача в гильбертовом пространстве, функционально-дифференциальное уравнение, краевая задача, оператор Грина, символическая компьютерная алгебра.

В работах математиков Пермской школы систематически применялся прием, получивший название W-подстановки. Суть его в переносе рассматриваемой задачи в пространство (локально) суммируемых функций с помощью оператора Грина надлежащим образом подобранной краевой задачи.

Эта идея, несмотря на ее простоту, оказалась очень эффективной как для получения условий разрешимости краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ), так и в теории устойчивости ФДУ.

В последние годы Н. В. Азбелев усиленно пропагандировал применение W-подстановки для решения и исследования вариационных задач. Развернутые изложения метода, в его состоянии на момент публикации, приведены в [1–3]. Последний обзор работ школы Н. В. Азбелева по теории и приложениям вариационных задач опубликован в [4].

§ 1. Канонический вид функционала

Наибольшее развитие получила теория задач вида

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \frac{1}{2}\Big(\psi\frac{d^n x}{dt^n}\Big)^2 + \frac{p}{2}\sum_{j=1}^m T_{1j}x\cdot T_{2j}x + T_0 x\,dt \to \min,\\ &\ell^i x = \alpha^i, \quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, N, \end{aligned} \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 06–01–00744 и 06–01–96060).

(p — положительный параметр). Здесь оператор $\psi : \mathbf{L}_2 \to \mathbf{L}_2$ — самосопряженный и обратимый, такой как $(\psi z)(t) = \psi(t) \cdot z(t)$, где $\psi(t)$ — измеримая функция, $\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,\,b]} \psi(t) < \infty$ и $\operatorname*{vrai\,inf}_{t\in[a,\,b]} \psi(t) > 0$. Такую задачу естественно рассматривать в соболевском пространстве $\mathbf{H}^n$ функций $x : [a,\,b] \to \mathbb{R}^k$. Операторы $T_{1j} : \mathbf{H}^{n-1} \to \mathbf{L}_2$ и $T_{2j} : \mathbf{H}^n \to \mathbf{L}_2$, $i = 1, \ldots, m$, $T_0 : \mathbf{H}^n \to \mathbf{L}_1$ — непрерывные линейные. Так как операторы T_{1j} определены на пространстве $\mathbf{H}^{n-1}$, выражения $(T_{1j}x)(t)$ не содержат старшей производной функции x.

Эта задача с помощью надлежащим образом выбранной W-подстановки переводится в экстремальную задачу

$$\frac{1}{2}\langle z,\, z\rangle - \frac{p}{2}\langle \mathbf{K}z,\, z\rangle - \langle \rho,\, z\rangle \to \min, \tag{2}$$

эквивалентную исходной задаче. В случае $N = n$ задача (2) ставится в пространстве $\mathbf{L}_2$. Если $N > n$, то задача (2) рассматривается в подпространстве пространства $\mathbf{L}_2$ коразмерности $N-n$. При этом оператор $\mathbf{K}$ — интегральный с симметричным квадратично суммируемым ядром. Здесь обсуждаются различные способы такого преобразования.

Для самосопряженного оператора $\mathbf{K}$ обозначим через $\sigma(\mathbf{K})$ его спектр, и пусть $r_+(\mathbf{K}) = \max\{0,\, \max\{\lambda \in \sigma(\mathbf{K})\}$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{K}$ *— вполне непрерывный самосопряженный оператор. Задача* (2) *имеет единственную точку минимума тогда и только тогда, когда* $p \cdot r_+(\mathbf{K}) < 1$.

Задачу вычисления $r_+(\mathbf{K})$ путем сдвига спектра удается свести к вычислению спектрального радиуса $r(\mathbf{Q})$ самосопряженного оператора. Для этого применим следующий итерационный метод. Выберем функцию $y_0 \in \mathbf{L}_2$ и положим $y_i = \mathbf{Q}y_{i-1}$ для $i = 1, 2, \ldots$. Обозначим через E_0 сумму собственных подпространств, отвечающих собственным числам, модуль которых равен $r(\mathbf{Q})$, и через E_1 — ортогональное дополнение к E_0.

Теорема 2. *Пусть* $\sigma(\mathbf{Q}) \subset [-q,\, q] \bigcup \{-r(\mathbf{Q}),\, r(\mathbf{Q})\}$, *где* $q < r(\mathbf{Q})$. *Если* $y_0 \notin E_1$, *то последовательность чисел* $\dfrac{\|y_i\|}{\|y_{i-1}\|}$ *неубывает и имеет своим пределом* $r(\mathbf{Q})$. *Эта сходимость не медленнее сходимости геометрической прогрессии со знаменателем* $\dfrac{q}{r(\mathbf{Q})}$.

§ 2. Пакет $\mathbf{L}_2$

Для производства этих (и подобных им) вычислений в пространстве $\mathbf{L}_2$ автор разрабатывает программный пакет $\mathbf{L}_2$ [5]. Он состоит из 2 библиотек функций для системы Maple V R4, документации к ним и набора примеров их применения.

Пакет позволяет оперировать кусочно многочленными функциями, у которых границы между «кусками» и коэффициенты многочленов суть рациональные числа. Для таких функций в библиотеке `l2_lib.m` реализованы арифметические операции, вычисление скалярного произведения и квадрата нормы, взятие интеграла. В библиотеке `bvp_lib.m` имеются операции вычисления значения в точке, нахождения производной и первообразной.

Пакет позволяет работать с интегральными операторами, ядра которых кусочно полиномиальны, с линейными границами между «кусками». В библиотеке `l2_lib.m` реализованы арифметические операции над такими ядрами, операции применения такого оператора к функции, вычисление сопряженного ядра, ядра произведения двух таких операторов и другие. Библиотека `bvp_lib.m` позволяет получать функции Грина для краевых задач вида

$$\begin{array}{l} x^{(n)} = z, \quad z \in \mathbf{L}_2(a,\, b), \\ \ell^i x = 0, \quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n, \end{array}$$

где $\ell^i : \mathbf{H}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывные линейные функционалы произвольного (с естественными оговорками о кусочной полиномиальности) вида.

Нигде не предполагается, что разбиение на «куски» одинаковое для всех рассматриваемых функций и ядер операторов. Поэтому при производстве операций появляются новые границы, а количество «кусков» может возрастать, в принципе, неограниченно.

Благодаря символьному характеру вычислений в Maple и сделанному выбору класса рассматриваемых функций, все конечные вычисления в пакете производятся точно. Поэтому, например, при вычислении спектрального радиуса методом теоремы 2 единственным источником погрешности является прекращение итераций.

§ 3. Примеры

Автор приводит несколько примеров, вычисления в них произведены с использованием пакета $\mathbf{L}_2$.

Ряд примеров связан с расчетами упругих стержней в механике. Это задачи о прогибе горизонтальной балки и об устойчивости стойки при продольной нагрузке. Параметры этих стержней, характеризующие их жесткость, могут быть переменными вдоль стержня и даже разрывными. Возможно произвольное количество промежуточных опор, как жестких, так и упругих.

Интересно отметить, что благодаря общему виду операторов T_{ij} в (1) столь же просто с помощью W-подстановки исследовать и вариационные задачи для функционала с отклоняющимся аргументом (нелокального функционала, по терминологии Г. А. Каменского). Несколько таких примеров рассмотрены в работе. В частности, доказано существование минимума в тех примерах, для которых ранее Г. А. Каменский получил необходимые условия экстремума.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Azbelev N. V. and Rakhmatullina L. F. Theory of linear functional differential equations and applications. // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. 1996. Vol. 8.
2. Гусаренко С. А. Оптимальное управление: экстремальные и вариационные задачи. Пермь, 2001. 86 с.
3. Азбелев Н. В., Култышев С. Ю., Цалюк В. З. Функционально-дифференциальные уравнения и вариационные задачи. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. 2006. 123 с.
4. Tsalyuk V. Z. The W-method for variational problems with quadratic functionals // Functional differential equations. 2008. Vol. 15, № 3–4.
5. Цалюк В. З. Проект $\mathbf{L}_2$.
`http://vts.math.kubsu.ru/l2/l2.htm`

Поступила в редакцию 25. 02. 08

V. Z. Tsalyuk

W-method for the study of variational problems (with computational aspects)

The paper gives a survey of the recent state of the theory concerned with the W-substitution in quadratic variational problems, the announcement on the programming package for exact calculations for such problems and the examples of applications.

Цалюк Вадим Зиновьевич
Кубанский государственный университет
350040, Россия, г. Краснодар,
ул. Ставропольская, 149
E-mail: vts@math.kubsu.ru