ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.928.1+517.929.8

© *Д. В. Хлопин*

СХОДИМОСТЬ ЛОМАНЫХ ЭЙЛЕРА В УСЛОВИЯХ КАРАТЕОДОРИ [1]

В условиях Каратеодори исследуется сходимость ломаных Эйлера к решениям системы. Множество всевозможных разбиений оснащается псевдометрикой. Показано, что сходимость разбиений к рассматриваемому промежутку гарантирует сходимость ломаных Эйлера к пучку решений системы.

Ключевые слова: ломаные Эйлера, сходимость к пучку решений, функции Каратеодори, системы с измеримой по времени правой частью.

Известно, что в системах с непрерывной правой частью ломаная Эйлера лежит сколь угодно близко к решению системы при достаточно малом диаметре разбиения [1]. Для измеримой правой части малый диаметр разбиения не гарантирует сходимость даже при одном разрыве функции правой части вдоль всякой траектории. Всевозможные пределы все более мелких ломаных Эйлера исследовались в работе [2].

В данной работе рассматривается дифференциальная система

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

в m-мерном фазовом пространстве $\mathbf{R}^m$ на конечном промежутке $I_0 \stackrel{\triangle}{=} [t_0, T]$ $(t_0 < T)$. На систему накладываются *условия Каратеодори и условие продолжимости всех решений на весь отрезок* I_0.

Пусть $\mathcal{D}$ — семейство всех замкнутых подмножеств множества I_0, содержащих точки t_0, T. Каждому множеству переключений $\Delta \in \mathcal{D}$ поставим в соответствие функцию $\tau^*_\Delta(t) = \max\{\tau \mid \tau \in \Delta, \tau \leqslant t\}$.

Для всех $m' \in \mathbf{N}$, для всяких функции Каратеодори $F \in B(I_0 \times \mathbf{R}^{m'}, \mathbf{R}^{m'})$ и компакта $\Psi \subset C(I_0, \mathbf{R}^{m'})$ определим на $\mathcal{D}$ псевдометрику $\varrho^F_\Psi \colon \mathcal{D} \times \mathcal{D} \mapsto [0, +\infty]$ по правилу:

$$\varrho^F_\Psi(\Delta_1, \Delta_2) \stackrel{\triangle}{=} \sup_{y \in \Psi} \int_{I_0} \Big\| F\big(\tau^*_{\Delta_1}(t), y\big(\tau^*_{\Delta_1}(t)\big)\big) - F\big(\tau^*_{\Delta_2}(t), y\big(\tau^*_{\Delta_2}(t)\big)\big) \Big\|_{m'} \, dt.$$

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты 06-01-00414, 07-01-96088) и Фонда содействия отечественной науке.

Как показано в работе [3], найдется последовательность конечных разбиений, сходящаяся (по псевдометрике) к I_0.

Под ломаной Эйлера для всякого $\Delta \in \mathcal{D}$ будем понимать всякое решение уравнения

$$\xi(\vartheta) = x_0 + \int_{[t_0,\vartheta)} f\big(\tau^*_\Delta(t), \xi\big(\tau^*_\Delta(t)\big)\big)\,dt. \tag{2}$$

Через Ξ^Δ обозначим множество всех решений (2) из $C_m(I_0)$, в частности, Ξ^{I_0} — всевозможные решения (1).

Теорема 1. *Для задачи* (1) *всегда можно указать такие компакт* $\Psi \subset C_{m+2}(I_0)$ *и функцию Каратеодори* $F \in B(I_0 \times \mathbf{R}^{m+2}, \mathbf{R}^{m+2})$, *что для любого* $\varepsilon \in (0,\infty)$ *существует такое* $d \in (0,\infty)$, *что для всякого* $\Delta \in \mathcal{D}$, $\varrho^F_\Psi(\Delta, I_0) < d$ *множество* Ξ^Δ *непусто и для всякой ломаной Эйлера* $\xi \in \Xi^\Delta$ *найдется решение* $x \in \Xi^{I_0}$ *со свойством* $||x-\xi||_{C_m(I_0)} < \varepsilon$.

Отметим, что в случае ограниченной правой части вместо функции F можно взять правую часть системы — функцию f.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
2. Miriča S. Feedback differential systems: approximate and limitink trajectories // Studia Univ.Babeş-Bolyai Math. 2004. Vol. 49, № 3. P. 83–96
3. Хлопин Д. В. Ломаные Эйлера в системах с условиями Каратеодори // Труды ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2007. Т. 13, № 2. С. 167–184

Поступила в редакцию 12.02.08

D. V. Khlopin
The convergence of Euler's broken lines

We consider the convergence of Euler's broken lines to trajectories of the system under Carathéodory's conditions. We introduce a pseudometric on the set of closed subsets of the time segment, taking into account the system. We prove that the convergence of partitions guarantees the convergence of Euler's broken lines to the funnel of solutions of the system.

Хлопин Дмитрий Валерьевич
Институт математики и механики УрО РАН
620219, г. Екатеринбург,
ул. С.Ковалевской, 16.
E-mail: khlopin@imm.uran.ru