ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.977

© *В. Н. Ушаков, С. А. Брыкалов, Я. А. Латушкин*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЕФЕКТА СТАБИЛЬНОСТИ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ УПРАВЛЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ [1]

Исследуется свойство стабильности в игровой задаче сближения конфликтно-управляемой системы с целевым множеством в фиксированный момент окончания. Для множеств в пространстве позиций игры вводится понятие дефекта стабильности.

Ключевые слова: дифференциальные игры, теория управления, стабильный мост.

Рассматривается конфликтно-управляемая система на конечном промежутке времени. Исследуются вопросы, относящиеся к одному из центральных понятий теории позиционных диффренциальных игр — свойству стабильности [1–4]. Работа примыкает к [1–9].

Показано, что конструкции, участвующие в инфинитезимальном представлении свойства стабильности, удобно использовать и для расширения понятия стабильности. Это влечет расширение сферы действия метода экстремального сдвига.

§ 1. Постановка задачи конфликтного управления

Пусть поведение конфликтно-управляемой системы на промежутке $[t_0, \vartheta]$, $t_0 < \vartheta < \infty$ описывается системой

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \ x(t_0) = x_0, \quad u \in P, \ v \in Q. \tag{1}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^m$ — фазовый вектор системы, u и v — управления первого и второго игроков, P и Q — компакты в пространствах $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно. Символ $\mathbb{R}^n$ означает евклидово пространство размерности n.

Предполагается, что выполнены следующие условия:

A. Вектор-функция $f(t, x, u, v)$ определена и непрерывна по совокупности переменных (t, x, u, v) на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P \times Q$ и для любого компакта $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ найдется такое $L = L(D) \in (0, \infty)$, что

$$\big\| f(t, x^{(1)}, u, v) - f(t, x^{(2)}, u, v) \big\| \leqslant L \big\| x^{(1)} - x^{(2)} \big\| \tag{2}$$

[1]При финансовой поддержке РФФИ, гранты 05-01-00601, 06-01-00436.

для любых $(t,x^{(i)},u,v)\in D\times P\times Q$, $i=1,2$.

B. Существует такое $\mu\in(0,\infty)$, что

$$\|f(t,x,u,v)\|\leqslant\mu(1+\|x\|)$$

для любых $(t,x,u,v)\in[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m\times P\times Q$. Здесь $\|f\|$ — норма вектора f в соответствующем евклидовом пространстве.

Рассматриваемая нами дифференциальная игра является антагонистической и складывается из двух задач — задачи о сближении и задачи об уклонении [4]. В задаче о сближении, стоящей перед первым игроком, требуется обеспечить попадание движения $x(t)$, $t\in[t_0,\vartheta]$ системы (1) в момент ϑ на заданный компакт M в $\mathbb{R}^m$, каковы бы ни были при этом допустимые управления второго игрока. Решение задачи требуется обеспечить в классе позиционных процедур управления с поводырём первого игрока [4].

Задача об уклонении, стоящая перед вторым игроком, заключается в том, чтобы обеспечить уклонение движений $x(t)$, $t\in[t_0,\vartheta]$ системы (1) в момент ϑ от некоторой замкнутой ε-окрестности M_ε компакта M, каковы бы ни были при этом допустимые управления первого игрока. Решение задачи требуется обеспечить в классе контр-позиционных процедур управления с поводырём второго игрока [4].

Для сформулированной дифференциальной игры справедлива альтернатива [4]: существует такое замкнутое множество $W^0\subset[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m$ (максимальный u-стабильный мост), что для всех исходных позиций $(t_*,x_*)\in W^0$ разрешима задача о сближении и для всех исходных позиций $(t_*,x_*)\in([t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m)\setminus W^0$ разрешима задача об уклонении.

Согласно принципу экстремального сдвига [4] разрешающая процедура управления первого игрока может быть реализована для исходных позиций $(t_*,x_*)\in W^0$ как позиционная процедура управления с поводырем, нацеливающая движение $x(t)$ управляемой системы (1) на движение поводыря, идущее по мосту W^0. При этом основная трудность в решении задачи о сближении приходится на выделение моста W^0.

Задача о выделении W^0 в пространстве позиций — одна из основных и наиболее сложных задач, возникающих на пути построения решений дифференциальной игры. В большинстве задач мост W^0 можно вычислить лишь приближенно.

В результате приближенных построений мы получаем не мост W^0, а некоторое другое множество в $[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m$, которое обозначим символом $\mathcal{W}^0$. Множество $\mathcal{W}^0$ удовлетворяет краевому условию $\mathcal{W}^0(\vartheta)=M$, где $\mathcal{W}^0(t)=\{x\in\mathbb{R}^m:\ (t,x)\in\mathcal{W}^0\}$.

Для позиций $(t_*,x_*)\in\mathcal{W}^0$ разрешима, вообще говоря, не исходная задача о сближении с M, а менее жесткая задача о сближении с некоторой ε-окрестностью M_ε множества M. При этом в качестве позиционной процедуры управления первого игрока, обеспечивающей приведение движения $x(t)$ системы (1) на M_ε, мы используем процедуру управления, нацеливающую движение $x(t)$ на некоторую ломаную, протянутую через $\mathcal{W}^0$ и упирающуюся в конечный момент ϑ в множество $\mathcal{W}^0(\vartheta) = M$. Эту ломаную можно трактовать как движение поводыря.

В следующих пунктах этой работы мы рассмотрим некоторое ограниченное замкнутое множество W^* из $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, $W^*(\vartheta) = M$, в предположении, что оно удовлетворяет некоторым условиям (см. раздел 4). Для W^* и позиций $(t_*, x_*) \in W^*$ можно определить процедуру управления, аналогичную той, которая упоминалась для множества $\mathcal{W}^0$ [10]. Эту процедуру, являющуюся по смыслу процедурой управления с поводырем, будем называть для краткости W^*-процедурой управления первого игрока.

§ 2. Стабильность множеств в пространстве позиций игры

Максимальный стабильный мост W^0 состоит из всех тех точек (t_*, x_*) множества $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, из которых разрешима задача о сближении. Учитывая это и условие B, мы можем указать в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ достаточно большую ограниченную и замкнутую область D, содержащую мост W^0 и все движения, находящиеся в достаточно малой окрестности моста W^0.

Однако в связи с тем, что в последующих пунктах мы будем рассматривать множества $W^* \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, не обязательно являющиеся стабильными мостами и могущие достаточно сильно отличаться от W^0, упомянутого выше выбора области D нам недостаточно.

Зададим некоторый компакт $W^* \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, $W^*(\vartheta) \subset M$, свойства которого детализируются несколько позже, и уточним выбор области D.

Обозначим $h(W_2, W_1)$ — хаусдорфово отклонение множества W_2 от W_1, где W_1 и W_2 из $\mathbb{R}^m$.

Пусть число $\varepsilon_* > 0$ выбрано удовлетворяющим неравенствам

$$\varepsilon_* > \sup_{t \in [t_0, \vartheta]} h\left(W^*(t), \{0\}\right), \quad \varepsilon_* > \rho_* + \mu(\vartheta - t_0) e^{\mu(\vartheta - t_0)},$$

здесь $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$, $\{\mathbf{0}\}$ — множество, состоящее из нуля, $\rho_* = h(M, \{\mathbf{0}\})$.

Тогда цилиндр $Z = \{(t, x) :\ t \in [t_0, \vartheta], \|x\| \leqslant \varepsilon_*\}$ в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ будет содержать как W^*, так и W^0. Цилиндр Z содержится в ограниченной и замкнутой области

$$D = \{(t, x) : t \in [t_0, \vartheta], \|x\| \leqslant (\varepsilon_* + \mu(t - t_0)) e^{\mu(t - t_0)}\}$$

из $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$.

Область D есть интегральная воронка на $[t_0,\vartheta]$ дифференциального включения (д. в.)

$$\dot{x}\in U(x)=\{f\in\mathbb{R}^m:\|f\|\leqslant\mu(1+\|x\|)\}$$

с начальным множеством $D(t_0)=\{x^0\in\mathbb{R}^m:\|x^0\|\leqslant\varepsilon_*\}$.

Пусть G — наибольший из шаров $U(x)$, $(t,x)\in D$ и ρ — его радиус. Справедливо вложение $F(t,x)=\operatorname{co}\{f(t,x,u,v):u\in P,v\in Q\}\subset U(x)$, $(t,x)\in[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m$ и, следовательно, для любого решения $x(t)$ д. в. $\dot{x}\in F(t,x)$, $(t_*,x(t_*))=(t_*,x_*)\in Z$ имеет место включение $F\big(t,x(t)\big)\subset G$.

Полагаем

$$\Pi_l(t,x)=\{f\in\mathbb{R}^m:\langle l,f\rangle\leqslant H(t,x,l)\},\quad F_l(t,x)=F(t,x)\bigcap\Pi_l(t,x),$$

$(t,x,l)\in D\times S$, $S=\{l\in\mathbb{R}^m:\|l\|=1\}$. Тогда справедливо включение $F_l(t,x)\subset G$, $(t,x,l)\in D\times S$.

Определение стабильного моста W и максимального стабильного моста W^0 дадим теперь в терминах семейства $\mathcal{L}=\{(t,x)\mapsto F_l(t,x),l\in S\}$ отображений $(t,x)\mapsto F_l(t,x)$, $(t,x)\in D$, отвечающих векторам $l\in S$. А именно, обозначим через $X_l(t^*;t_*,x_*)$ — множество всех $x^*\in\mathbb{R}^m$, удовлетворяющих равенству $x(t^*)=x^*$, где $x(\cdot)=\{x(t):t_*\leqslant t\leqslant t^*\}$ — некоторое решение д. в. $\dot{x}\in F_l(t,x)$, $x(t_*)=x_*$, $t\in[t_*,t^*]$,

$$X_l^{-1}(t_*;t^*,X^*)=\{x_*\in\mathbb{R}^m:X_l(t^*;t_*,x_*)\bigcap X^*\neq\emptyset\};$$

X^* — множество из $\mathbb{R}^m$.

Определение 1. Оператором стабильного поглощения π в задаче о сближении назовем отображение $(t_*;t^*,X^*)\mapsto 2^{\mathbb{R}^m}$, заданное равенством

$$\pi(t_*;t^*,X^*)=\bigcap_{l\in S}X_l^{-1}(t_*;t^*,X^*),$$

$(t_*,t^*,X^*)\in\Delta\times 2^{\mathbb{R}^m}$; здесь $\Delta=\{(t_*,t^*):t_0\leqslant t_*<t^*\leqslant\vartheta\}$.

Определение 2. Замкнутое множество $W\subset D$ назовем u-стабильным мостом, если

$$W(\vartheta)\subset M;\quad W(t_*)\subset\pi(t_*;t^*,W(t^*)),\quad(t_*,t^*)\in\Delta.$$

Пусть W^0 — объединение всех u-стабильных мостов $W\subset D$. W^0 — максимальный (по включению) u-стабильный мост и представляет собой множество позиционного поглощения в рассматриваемой задаче о сближении (см. [4]). Очевидно, что для моста W^0 условие $W(\vartheta)\subset M$ из определения 2 принимает вид $W^0(\vartheta) = M$. Кроме того, мост W^0 обладает T-свойством: из $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$ и $W^0(t_*) \neq \varnothing$ следует $W^0(t^*) \neq \varnothing$. T-свойство моста W^0 можно охарактеризовать как свойство непрерываемости моста W^0 при возрастании времени t на $[t_0, \vartheta]$.

Далее, справедливо соотношение

$$X_l(t^*; t_*, x_*) \bigcap W^0(t^*) \neq \varnothing, \quad (t_*, x_*, l) \in W^0 \times S,$$

и, значит, учитывая $X_l(t^*; t_*, x_*) \subset O_{(t^*-t_*)\rho}(x_*)$, получаем

$$W^0(t^*) \bigcap O_{(t^*-t_*)\rho}(x_*) \neq \varnothing, \quad (t_*, x_*) \in W^0;$$

здесь $O_{(t^*-t_*)\rho}(x_*) = \{w \in \mathbb{R}^m : \|w - x_*\| \leqslant \rho(t^* - t_*)\}$. Следовательно, $\overrightarrow{D} W^0(t_*, x_*) \bigcap G \neq \emptyset$ при всех $(t_*, x_*) \in W^0$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$.

§ 3. Дефект стабильности множеств в пространстве позиций игры

В этом параграфе определим дефект стабильности множества, содержащегося в D. Предполагаем, что множество $W^* \subset D$ удовлетворяет условию $W^*(\vartheta) = M$ и обладает T-свойством. Более того, в усиление T-свойства множества W^* предполагаем:

C. $W^*(t^*) \bigcap O_{(t^*-t_*)\rho}(x_*) \neq \emptyset$, $(t_*, x_*) \in W^*$, $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$.

Введем в рассмотрение множество

$$\overrightarrow{D} W(t,x) = \Big\{ d \in \mathbb{R}^m : d = \lim_{k\to\infty} \frac{w_k - x}{t_k - t}, \ (t_k, w_k) \in W, \ k = 1, 2, \ldots; \\ t_k \downarrow t \text{ при } k \to \infty, \ \lim_{k\to\infty} (t_k, w_k) = (t, x) \Big\}.$$

Из условия C следует

$$\overrightarrow{D} W^*(t_*, x_*) \bigcap G \neq \emptyset, \quad (t_*, x_*) \in \partial W^*, \quad t_* \in [t_0, \vartheta);$$

здесь ∂W^* — граница множества W^* в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$.

Сопоставим каждой точке $(t_*, x_*) \in \partial W^*$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$ число

$$\varepsilon(t_*, x_*) = \sup_{l \in S} \rho\Big(\overrightarrow{D} W^*(t_*, x_*), F_l(t_*, x_*)\Big) \geqslant 0,$$

здесь обозначено $\rho(D^*, F^*) = \inf\limits_{(d,f) \in D^* \times F^*} \|d - f\|$, где D^* и F^* — множества из $\mathbb{R}^m$. Величину $\varepsilon(t_*, x_*)$ назовем дефектом стабильности множества W^* в точке $(t_*, x_*) \in \partial W^*$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$.

Для последующих рассуждений заменим множество $\overrightarrow{D} W^*(t_*, x_*)$, входящее в выражение для $\varepsilon(t_*, x_*)$, более узким, компактным, множеством.

При этом значение $\varepsilon(t_*, x_*)$ сохранится. Введем в рассмотрение множество $\overrightarrow{D}^{\nabla} W^*(t_*, x_*) = \overrightarrow{D} W^*(t_*, x_*) \bigcap 3G$, где $3G = \{3g : g \in G\}$. Так как $\overrightarrow{D} W^*(t_*, x_*) \bigcap G \neq \emptyset$, $F_l(t_*, x_*) \subset G$ при $(t_*, x_*) \in \partial W^*$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, $l \in S$, то

$$\rho(\overrightarrow{D}^{\nabla} W^*(t_*, x_*), F_l(t_*, x_*)) = \rho(\overrightarrow{D} W^*(t_*, x_*), F_l(t_*, x_*))$$

при $(t_*, x_*) \in \partial W^*$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, $l \in S$. Поэтому верно

$$\varepsilon(t_*, x_*) = \sup_{l \in S} \rho\Big(\overrightarrow{D}^{\nabla} W^*(t_*, x_*), F_l(t_*, x_*)\Big), \quad (t_*, x_*) \in \partial W^*, \quad t_* \in [t_0, \vartheta).$$

Полагаем

$$\varepsilon(t_*) = \sup_{(t_*, x_*) \in \Lambda(t_*)} \varepsilon(t_*, x_*),$$

где $t_* \in [t_0, \vartheta)$, $\Lambda(t_*) = \partial W^* \bigcap \Gamma_{t_*}$, $\Gamma_{t_*} = \{(t, x) : t = t_*\}$.

Величину $\varepsilon(t_*)$ назовем *дефектом стабильности множества* W^* *в момент* $t_* \in [t_0, \vartheta)$. Вместе с тем возникает неотрицательная функция $\varepsilon(t)$ на $[t_0, \vartheta)$, которую можно трактовать как некоторую характеристику степени нестабильности множества W^*.

Если W^* — u-стабильный мост, то по теореме 1 имеем

$$\overrightarrow{D} W^*(t_*, x_*) \bigcap F_l(t_*, x_*) \neq \varnothing, \quad (t_*, x_*) \in \partial W^*, \quad t_* \in [t_0, \vartheta), \quad l \in S,$$

и, следовательно, $\overrightarrow{D}^{\nabla} W^*(t_*, x_*) \bigcap F_l(t_*, x_*) \neq \varnothing$.

Значит, $\varepsilon(t_*, x_*) = 0$ или $(t_*, x_*) \in \partial W^*$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, а тогда $\varepsilon(t) = 0$ на $[t_0, \vartheta)$. В свою очередь, из равенства $\varepsilon(t) = 0$ на $[t_0, \vartheta)$ следует

$$\overrightarrow{D}^{\nabla} W^*(t_*, x_*) \bigcap F_l(t_*, x_*) \neq \varnothing,$$

$(t_*, x_*) \in \partial W^*$, $l \in S$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, то есть W^* — u-стабильный мост.

Мы показали, что стабильность множества W^* эквивалентна равенству $\varepsilon(t) = 0$ на $[t_0, \vartheta)$. Значит, при $\varepsilon(t) = 0$ на $[t_0, \vartheta)$ правило экстремального сдвига на поводыря, идущего по W^*, гарантирует приведение движения $x(t)$ системы (1) на M, если $(t_*, x(t_*)) = (t_*, x_*) \in W^*$.

Это наводит на мысль, что в случае, когда множеству W^* отвечает малая функция $\varepsilon(t)$ на $[t_0, \vartheta)$, правило экстремального прицеливания на поводыря, идущего по W^*, гарантирует приведение движения $x(t)$ системы (1) в малую ε-окрестность множества M в момент ϑ. Кроме того, интуитивно ясно, что ε может быть выражено через интеграл $\displaystyle\int_{t_0}^{\vartheta} \varepsilon(t) dt$ (в случае, если эта функция интегрируема на $[t_0, \vartheta]$).

Для обоснования этих положений наложим на W^* и $\varepsilon(t)$, $[t_0,\vartheta)$ дополнительные условия.

D. Существует такая скалярная функция $\varphi^*(\delta)\downarrow 0$ при $\delta\downarrow 0$, что

$$h(x_* + \delta \overrightarrow{D}^{\nabla} W^*(t_*,x_*), \quad W^*(t_*+\delta)) \leqslant \delta\varphi^*(\delta)$$

при $t_*\in[t_0,\vartheta)$, $(t_*,x_*)\in\partial W^*$, $\delta\in(0,\vartheta-t_*)$.

E. Функция $\varepsilon(t)$ интегрируема по Риману на $[t_0,\vartheta]$.

Здесь обозначено $x_*+\delta X_* = \{x_*+\delta f : f\in X_*\}$, $X_*\subset\mathbb{R}^m$.

Позиционное управление первого игрока, описанное в [1,2], основано на правиле экстремального прицеливания движения $x(t)$ системы (1) на u–стабильный мост W. Тот же самый метод может быть использован, если u–стабильный мост заменить на множество W^*. Позиционную стратегию $U^e(t,x)$ первого игрока, основанную на правиле экстремального прицеливания на W^*, обозначим для краткости W^*-стратегией первого игрока.

Теорема 1. *Движение* $x(t)$ $(x(t_*)=x_*\in W^*(t_*))$ *на* $[t_*,\vartheta]$, *определенное с помощью* W^**-стратегии первого игрока, удовлетворяет включению*

$$x(\vartheta)\in M_\varepsilon, \quad \text{где} \quad \varepsilon=\varepsilon_{W^*}=e^{L(\vartheta-t_0)}\int_{t_0}^{\vartheta}\varepsilon(\tau)d\tau. \tag{3}$$

Число $\varepsilon=\varepsilon_{W^*}$ (3) может рассматриваться как мера нестабильности множества W^*. Естественно его называть *дефектом стабильности множества* W^*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н. Игровые задачи динамики // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1969. № 5. С. 3-12.
2. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
3. Красовский Н. Н., Субботин А. И. О структуре дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1969. Т. 190, № 3. С. 523–526.
4. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
5. Красовский Н. Н. К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1260–1263.
6. Красовский Н. Н. Унификация дифференциальных игр // Труды Института математики и механики УНЦ АН СССР. Свердловск, 1977. Вып. 24. Игровые задачи управления. С. 32–45.
7. Тарасьев А. М., Ушаков В. Н. О построении стабильных мостов в минимаксной игре сближения–уклонения. Свердловск, 1983. 61 с. Деп. в ВИНИТИ. № 2454-83.

8. Guseinov H. G., Subbotin A. I., and Ushakov V. N. Derivatives for Multivalued Mappings with Applications to Game–Theoretical Problems of Control // Problems Control Inform. Theory. 1985. Vol. 14, № 6. P. 405–419.
9. Subbotin A. I. Generalized Solutions of First-Order PDEs. The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhäuser, 1995. 312 P. (System & Control: Foundation & Appl.)
10. Ушаков В. Н., Латушкин Я. А. Дефект стабильности множеств в пространстве позиций игры // Труды МИРАН. М.: 2008. Вып. 24.

Поступила в редакцию 22. 01. 08

V. N. Ushakov, S. A. Brykalov, Y. A. Latushkin
Using the stability defect for the construction of control in the differential game

The paper presents the conflict-controlled system on finite time interval. The stability property is considered which is the basic notion in the theory of positional differential games.

Ушаков Владимир Николаевич
Институт математики
и механики УрО РАН
620219, Россия, г. Екатеринбург,
ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Брыкалов Сергей Аркадьевич
Институт математики
и механики УрО РАН
620219, Россия, г. Екатеринбург,
ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: brykalov@imm.uran.ru

Латушкин Ярослав Александрович
Институт математики
и механики УрО РАН
620219, Россия, г. Екатеринбург,
ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: yarlat@mail.ru