ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.927.2

© ***А. Л. Тептин***

О ЗНАКЕ ФУНКЦИИ ГРИНА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ И ШТУРМОВСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Приведены условия, при которых функция Грина краевой задачи с двумя краевыми условиями Штурма и $n-2$ периодическими сохраняет знак.

Ключевые слова: знак функции Грина.

Рассматривается краевая задача

$$Ly \equiv y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t) y^{(k)} = 0, \tag{1}$$

$$l_i y \equiv \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y^{(n-j)}(a_i) = 0,\ c_{i1} = 1,\ i = 1,2,\ a_1 = a,\ a_2 = b, \tag{2}$$

$$y^{(k)}(a) = y^{(k)}(b), \quad k = \overline{0, n-3}, \tag{3}$$

где $p_k(t)$, $k = \overline{0, n-1}$ непрерывны на $[a,b]$ и ω-периодически продолжены на $\mathbb{R}$ при $\omega = b-a$, причем $p_k(a+i\omega) = p_k(a+0)$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $k = \overline{0, n-1}$, а $p_0(t)$ не меняет знак и $p(t) = p_0(t) + c_{1n} - c_{2n} \not\equiv 0$ в $[a,b]$.

Пусть $m = [n/2] - 1$; T_{12} — множество таких линейных дифференциальных операторов Q n-го порядка, что всякое нетривиальное решение (в расширенном смысле) уравнения $Qy = 0$, удовлетворяющее любым r из краевых условий (2), имеет на $[a, b+m\omega]$ не более $n-r-1$ нулей с учетом кратности, $r = 1,2$; I — единичный оператор.

Согласно теореме 1 из [1] при $L \in T_{12}$ существует разложение

$$L = \Big(\frac{d}{dt} - a_i(t) I\Big) L_{n-1,i}, \quad L_{n-1,i} = \Big(\frac{d}{dt} - a_{ij}(t) I\Big) L_{n-2}, \tag{4}$$
$$L_{n-2} = \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} + \sum_{k=0}^{n-3} q_k(t) \frac{d^k}{dt^k},$$

где $a_i(t)$ суммируемы, $a_{ij}(t)$ абсолютно непрерывны, $i,j = 1,2$, $i \neq j$, $q_k(t)$, $k = \overline{0, n-3}$ обладают абсолютно непрерывными производными в $[a, b+m\omega]$, $(L_{n-1,1}y)(a) = l_1 y$, $(L_{n-1,2}y)(b) = l_2 y$ при всех $y(t) \in C^{n-1}[a,b]$,

$a_{12}(t)-a_{21}(t)\neq 0$ при всех $t\in[a,b+m\omega]$ и оператор L_{n-2} неосцилляционный на $[a,b+m\omega]$, то есть любое нетривиальное решение уравнения $L_{n-2}y=0$ имеет на $[a,b+m\omega]$ не более $n-3$ нулей с учетом кратности. При условиях

$$c_{1n}c_{2n}\leqslant 0,\ (c_{1n}-c_{2n})p_0(t)\geqslant 0,\ p(t)\not\equiv 0 \text{ в } [a,b] \tag{5}$$

получается, что

$$q_0(t)\operatorname*{sign}_{[a,b]}p(t)(a_{21}-a_{12}(t))>0 \text{ при всех } t\in[a,b]. \tag{6}$$

В предлагаемой работе доказано, что при $L\in T_{12}$ существует разложение (4), обладающее перечисленными свойствами, в котором $q_k(t)$, $k=\overline{0,n-3}$ ω-периодичны. Отсюда на основе результатов работы [2] и неравенства (6) получена

Теорема 1. *Если $L\in T_{12}$ и $p_0(t)$ не меняет знак на $[a,b]$, то при условии (5) функция Грина $G(t,s)$ задачи (1)–(2) существует и сохраняет следующий знак*

$$G(t,s)\operatorname*{sign}_{[a,b]}p(t)>0 \textit{ при всех } t\in[a,b] \textit{ и } s\in(a,b).$$

* * *

1. Тептин А. Л. О неосцилляции решений и знаке функции Грина // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 6. С. 995–1005.
2. Тонков Е. Л., Хохряков А. Я., Юберев Н. Н. О функции Грина периодической краевой задачи и существовании периодических решений обыкновенного дифференциального уравнения // Тр. ТИХМ'а. Тамбов. 1968. Вып. 2. С. 16–20.

Поступила в редакцию 21. 01. 08

A. L. Teptin

On the sign of the Green's function of a boundary value problem with periodic and Sturm's boundary conditions

Conditions are presented under which the Green's function of a boundary value problem with two Sturm's boundary conditions and $n-2$ periodic boundary conditions preserves its sign.

Тептин Анатолий Лаврович
Ижевский государственный
технический университет
426069, Россия, г. Ижевск,
ул. Студенческая, 7 (корп. 6)
E-mail: pmi@istu.ru