ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.95

© *Н. Н. Субботина, Л. Г. Шагалова*

О СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ С КУСОЧНО–ЛИНЕЙНЫМИ ВХОДНЫМИ ДАННЫМИ [1]

Рассматривается задача Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с гамильтонианом, зависящим только от импульсной переменной. Получены оценки для минимаксного (и/или вязкостного) решения этой задачи в случае кусочной линейности гамильтониана или краевой функции. Предлагаемые оценки дают явные формулы для минимаксного решения, если входящие в них «минимаксы» и «максимины» совпадают.

Ключевые слова: уравнения Гамильтона–Якоби, минимаксные решения, вязкостные решения, формулы Хопфа.

Рассматривается следующая задача Коши:

$$\partial u(t,x)/\partial t + H(\partial u(t,x)/\partial x) = 0, \quad t \in (0,\theta), \quad x \in R^n, \tag{1}$$
$$u(\theta, x) = \sigma(x), \quad x \in R^n. \tag{2}$$

Предполагается, что θ — положительное число, $\sigma(\cdot) : R^n \to R$ — непрерывная функция, а гамильтониан $H(\cdot) : R^n \to R$ удовлетворяет условиям

$$|H(s_1) - H(s_2)| \leqslant L\|s_1 - s_2\|, \qquad \|s_1\| \leqslant 1, \quad \|s_2\| \leqslant 1 \tag{3}$$
$$H(\alpha s) = \alpha H(s), \quad s \in R^n, \quad \alpha > 0. \tag{4}$$

Известно [1, 2], что минимаксное (и/или вязкостное [3]) решение этой задачи существует и единственно. В некоторых случаях для минимаксного решения известны явные формулы. Так, например, если какая-то из функций $H(\cdot)$ и $\sigma(\cdot)$ выпукла или вогнута, минимаксное решение задачи (1), (2) можно представить с помощью формул Хопфа–Лакса и Пшеничного–Сагайдак [4, 5, 6, 7]. Однако в общем случае выписать явные формулы для решения не удается.

В работе [8] был предложен конечный алгоритм построения точного минимаксного решения задачи (1), (2) в случае, когда обе функции

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05–01–00609) и Программы Президента РФ «Ведущие научные школы» (проект НШ–8512.2006.1).

$H(\cdot)$ и $\sigma(\cdot)$ являются положительно однородными и кусочно-линейными, а размерность n фазового пространства равна двум. Минимаксное решение, построенное с помощью этого алгоритма, является кусочно-линейной функцией.

В данной работе задача (1), (2) исследуется в предположении кусочной линейности хотя бы одной из функций $H(\cdot)$ и $\sigma(\cdot)$ без ограничений на размерность фазового пространства.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть гамильтониан $H(\cdot)$ удовлетворяет условиям* (3), (4) *и является кусочно–линейным. Тогда для минимаксного решения $u(t,x)$ задачи* (1), (2) *справедливо неравенство*

$$\max_{q\in Q}\min_{p\in P}\sigma(x+(\theta-t)(p+q))\leqslant u(t,x)\leqslant\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\sigma(x+(\theta-t)(p+q)), \tag{5}$$
$$t\in[0,\theta],\quad x\in R^n,$$

где многогранники Q и P составляют квазидифференциал Демьянова [9] *для функции $H(\cdot)$ в точке $s=0$ и*

$$H(s)=\max_{q\in Q}\langle s,q\rangle+\min_{p\in P}\langle s,p\rangle\,. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть гамильтониан $H(\cdot)$ удовлетворяет условиям* (3), (4), *а функция $\sigma(\cdot)$ является липшицевой и положительно однородной, то есть*

$$|\sigma(x_1)-\sigma(x_2)|\leqslant C\|x_1-x_2\|,\qquad \|x_1\|\leqslant 1,\quad \|x_2\|\leqslant 1, \tag{7}$$
$$\sigma(\alpha x)=\alpha\sigma(x),\quad x\in R^n,\quad \alpha>0. \tag{8}$$

Пусть, кроме того, функция $\sigma(\cdot)$ является кусочно-линейной и многогранники A и B составляют ее квазидифференциал в точке $x=0$:

$$\sigma(x)=\max_{a\in A}\langle a,x\rangle+\min_{b\in B}\langle b,x\rangle\,. \tag{9}$$

Тогда для минимаксного решения $u(t,x)$ задачи (1), (2) *справедливо неравенство*

$$\max_{a\in A}\min_{b\in B}\varphi(t,x,a,b)\leqslant u(t,x)\leqslant\min_{b\in B}\max_{a\in A}\varphi(t,x,a,b), \tag{10}$$
где $t\in[0,\theta],\ x\in R^n,\quad \varphi(t,x,a,b)=\langle a+b,x\rangle+(\theta-t)H(a+b).$

Отметим, что функции, стоящие в левых (правых) частях неравенств (5) и (10), являются нижними (верхними) минимаксными решениями в задаче (1), (2).

Справедливо также следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть гамильтониан $H(\cdot)$ и краевая функция $\sigma(\cdot)$ удовлетворяют условиям* (3), (4) *и* (7), (8) *соответственно. Пусть, кроме того, $H(\cdot)$ и $\sigma(\cdot)$ являются кусочно-линейными и справедливы представления* (6) *и* (9). *Тогда для минимаксного решения $u(t,x)$ задачи* (1), (2) *выполнены соотношения*

$$u_-(t,x) \leqslant u(t,x) \leqslant u_+(t,x), \tag{11}$$

где

$$u_-(t,x) = \max\Big\{\max_{q\in Q}\min_{p\in P}\max_{a\in A}\min_{b\in B}\psi(t,x,a,b,p,q),$$
$$\max_{a\in A}\min_{b\in B}\max_{q\in Q}\min_{p\in P}\psi(t,x,a,b,p,q)\Big\},$$
$$u_+(t,x) = \min\Big\{\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\min_{b\in B}\max_{a\in A}\psi(t,x,a,b,p,q),$$
$$\min_{b\in B}\max_{a\in A}\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\psi(t,x,a,b,p,q)\Big\},$$
$$\psi(t,x,a,b,p,q) = \langle a+b, x+(\theta-t)(p+q)\rangle\,.$$

В случаях, когда в каком-либо из неравенств (5), (10), (11) левая и правая части совпадают, мы получаем явную формулу для соответствующего минимаксного решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Субботин А. И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991.
2. Subbotin A. I. Generalized Solutions of First Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhauser, 1995.
3. Crandall M. G., Lions P. L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, № 1. P. 1–42.
4. Hopf E. Generalized solutions of nonlinear equations of first order // J. Math. Mech. 1965. Vol. 14. P. 951–973.
5. Bardi M., Evans L. C. On Hopf's formulas for solutions of Hamilton–Jacobi equations // Nonlinear Analysys, Theory, Methods, Appl. 1984. Vol. 8, № 11. P. 1373–1381.
6. Barron E. N., Jensen R., Liu W. Hopf-Lax-type formula for $u_t+H(u,Du)=0$ // J. Differ. Equations. 1996. Vol. 126, № 1. P. 48–61.
7. Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И. О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика. 1970. № 2. С. 54–63.
8. Субботин А. И., Шагалова Л. Г. Кусочно-линейное решение задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби // Доклады РАН. 1992. Т. 325, № 5. С. 932–936.

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

9. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.

Поступила в редакцию 15.02.08

N. N. Subbotina, L. G. Shagalova

On the structure of the solution of the Hamilton-Jacobi equation with piecewise linear input data

The Cauchy problem is considered for the Hamilton–Jacobi equation with Hamiltonian depending on the impulse variable only. Estimations have been obtained for the minimax (and/or viscosity) solution to this problem in the case of piecewise linearity of the Hamiltonian or the border function. The proposed estimations provide explicit formulas for the minimax solution, if «minimaxes» and «maximins» contained in them coincide.

Субботина Нина Николаевна
Институт математики
и механики УрО РАН
620219, Россия, г. Екатеринбург,
ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: subb@uran.ru

Шагалова Любовь Геннадьевна
Институт математики
и механики УрО РАН
620219, Россия, г. Екатеринбург,
ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: shag@imm.uran.ru