МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.929.2

© *Д. Н. Спичкин*

О РЕШЕНИЯХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА КОНЕЧНЫХ ИНТЕРВАЛАХ

Приведены решения линейного m-разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, заданного на конечном интервале.

Ключевые слова: функции Виленкина–Крестенсона, m-разностные уравнения.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$ — n-разрядные m-ичные представления неотрицательных целых чисел. Под операцией $x \underset{m}{\ominus} p$ понимаем поразрядную разность по модулю m. Решениями m-разностного уравнения второго порядка

$$y(x \underset{m}{\ominus} 2) + k_1 y(x \underset{m}{\ominus} 1) + k_2 y(x) = 0, \quad x \in [0,\ m^n) \cap \mathbf{N}_0 \tag{1}$$

являются функции Виленкина–Крестенсона (ВКФ) [1]:

$$Pal(p,\ x) = \exp\left(i\frac{2\pi}{m} \sum_{j=1}^{n} p_{n+1-j} x_j \right), \tag{2}$$

где x — аргумент, p — некоторый параметр, причем обе величины заданы n-разрядным m-ичным представлением. Известно [1], что при решении таких уравнений часть разрядов параметра p фиксируется, а часть остается произвольной.

Теорема 1. *Пусть в уравнении* (1) *коэффициенты* k_i, $i = 1, 2$ — *постоянные и вещественные и пусть* $k_2 \leqslant \dfrac{k_1^2}{4}$. *Тогда только в трех случаях существует решение вида* (2):

а) *при* $k_1 = 0$, $k_2 = -1$ *существует* 2 *линейно независимых решения при* $p_1 = 0$ *или* $p_1 = \dfrac{m}{2}$;

б) *при* $k_1 = -2$, $k_2 = 1$ *существует только одно значение параметра* $p_1 = 0$, *дающее решение уравнения* (1);

в) *при* $k_1 = 2$, $k_2 = 1$ *существует только одно значение параметра* $p_1 = \dfrac{m}{2}$, *дающее решение уравнения* (1).

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

Рассмотрим систему линейных m-разностных уравнений

$$y(x \underset{m}{\ominus} 1) = Ay(x) \tag{3}$$

с постоянной вещественной квадратной матрицей A.

Теорема 2. *Если матрица A имеет собственное число $\lambda = -1$ кратности 2, которому соответствует один собственный вектор h^0 и один присоединенный вектор h^1, то при $x_n \geqslant 1$ существуют два линейно независимых решения системы* (3):

$$y_1(x) = h^0 Pal(p,x) \quad \text{и} \quad y_2(x) = \left(xh^0 + h^1\right) Pal(p,x),$$

где $Pal(p,x)$ — функция вида (2), *являющаяся решением скалярного уравнения $\alpha(x \underset{m}{\ominus} 1) + \alpha(x) = 0$.*

Следствие 1. *Пусть $m > 2$. Уравнение* (1) *при $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $x_n \geqslant 2$ имеет два линейно независимых решения в базисе ВКФ*:

$$y_1(x) = (-1)^{x_n} \exp\left(i\frac{2\pi}{m}\sum_{j=1}^{n-1} p_{n+1-j}x_j\right),$$

$$y_2(x) = (-1)^{x_n}(x+1) \exp\left(i\frac{2\pi}{m}\sum_{j=1}^{n-1} p_{n+1-j}x_j\right).$$

* * *

1. Трахтман А. М., Трахтман В. А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975. 239 с.

Поступила в редакцию 08. 02. 08

D. N. Spichkin

About solutions of the difference equations of the second order on final intervals

Solutions are given of the linear m-difference equations of the second order on final intervals with constant coefficients.

Спичкин Дмитрий Николаевич
Ижевский государственный
технический университет
426069, Россия, г. Ижевск,
ул. Студенческая, 7 (корп. 6)
E-mail: dspich@mail.ru