ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.917

© *А. Н. Сесекин, Ю. В. Фетисова*

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ, ВОЗМУЩЕННЫЕ ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ [1]

Работа посвящена формализации и описанию решений нелинейной системы функционально-дифференциальных уравнений, возмущенных импульсным воздействием. Также исследован вопрос о непрерывной зависимости решения от начальной функции.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, импульсное возмущение.

Введение

В работе рассматривается задача формализации понятия решения нелинейных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и последействием в фазовых координатах. Обзоры различных подходов к решению этой проблемы для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений содержатся в [1–4]. Среди более поздних публикаций отметим работу [5]. Основными подходами к проблеме формализации понятия решения являются следующие. Первый подход связан с подменой дифференциального уравнения интегральным, в котором интеграл по интегрирующей функции трактуется как интеграл Лебега–Стилтьеса или Перрона–Стилтьеса. Второй связан с формализацией операции умножения разрывной функции на обобщенную. Третий подход связан с определением решений с помощью замыкания множества гладких решений в пространстве функций ограниченной вариации. Такой подход естественнен с точки зрения теории управления [6], где импульсные управления часто представляют собой идеализированные процессы с большим изменением параметров за короткие промежутки времени. Кроме отмеченных подходов отметим формализацию импульсных систем, предложенную А. Д. Мышкисом и А. М. Самойленко, где непрерывная составляющая траектории задавалась с помощью обыкновенного дифференциального уравнения, а реакции импульсных воздействий на систему описывались с помо-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06–01–00445).

щью некоторых алгебраических уравнений, описывающих скачки траекторий. Эти же подходы могут быть применены при формализации решений и функционально-дифференциальных уравнений.

В работе [7] подход, основанный на замыкании множества гладких решений в пространстве функций ограниченной вариации, развит на системы с постоянным запаздыванием. В данной работе этот подход развивается на системы с распределенным запаздыванием. В работе [8] подход А. Д. Мышкиса и А. М. Самойленко к системам с импульсным воздействием был распространен на функционально-дифференциальные уравнения.

§ 1. Определение решения и теорема существования

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \int_{-\tau}^{0} h(x(t+s))dg(t,s)) + B(t, x(t))\dot{v}(t), \;\; t \in [t_0, \vartheta], \tag{1.1}$$

$$x(t) = \varphi(t), \;\; t \in [t_0 - \tau, t_0], \tag{1.2}$$

где $x(t)$, $v(t)$ — соответственно n- и r-мерные вектор-функции времени, $h(x)$ — непрерывная вектор-функция размерности n, $g(t,s)$ — непрерывная функция, $f(t,x,y)$ — n-мерная вектор-функция, $B(t,x)$ — $n \times m$ матрица-функция, $\tau > 0$ — величина последействия, $\varphi(t)$ — начальная функция (начальное условие), заданная на $[t_0 - \tau,\, t_0]$. Предположим, что функции $f(t,x,y)$ и $B(t,x)$ в области $\Omega = [t_0, \vartheta] \times R^n \times R^n$ непрерывны по совокупности переменных, липшицевы по x и y с константой L и удовлетворяют следующим стандартным условиям:

$$\|f(t,x,y)\| \leqslant \kappa(1 + \|x\|), \;\; \|B(t,x)\| \leqslant \kappa(1 + \|x\|) \tag{1.3}$$

для всех допустимых t, x и y.

Если $v(t)$ — абсолютно непрерывная вектор-функция, определенная на отрезке $[t_0, \vartheta]$, то существует [9] единственное решение задачи Коши (1.1), (1.2).

В случае когда $v(t)$ — функция ограниченной вариации, производные в (1.1) необходимо понимать в обобщенном смысле [10]. Объясняется это следующим. Если функция $v(t)$ разрывна в некоторый момент времени, то система подвергается импульсному воздействию в этот момент. Следовательно, второй аргумент функции $B(t, x(t))$ оказывается разрывным и в слагаемом $B(t, x(t))\dot{v}(t)$ возникает некорректная операция умножения разрывной функции на обобщенную.

О п р е д е л е н и е 1. Аппроксимируемым решением системы (1.1) с начальным условием (1.2) назовем функцию ограниченной вариации $x(t)$, являющуюся поточечным пределом на $[t_0, \vartheta]$ последовательности абсолютно непрерывных решений $x_k(t)$ этой системы, порожденной последовательностью абсолютно непрерывных функций $v_k(t)$, поточечно сходящейся к вектор-функции ограниченной вариации $v(t)$, если этот предел не зависит от выбора последовательности.

Будем предполагать, что начальная функция $\varphi(t)$ является функцией ограниченной вариации.

Теорема 1. *Пусть функции* $f(t,x,y)$ *и* $B(t,x)$ *в области* Ω *удовлетворяют обозначенным выше условиям. Предположим также, что существуют непрерывные по* x *частные производные* $\partial b_{i,j}/\partial x_\nu$ *элементов матрицы-функции* $B(t,x)$, *удовлетворяющие следующим равенствам:*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial b_{ij}(t,x)}{\partial x_\nu} b_{\nu l}(t,x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial b_{il}(t,x)}{\partial x_\nu} b_{\nu j}(t,x),$$

$i = 1,2,\ldots,n$; $j,l = 1,2,\ldots,r$. *Тогда для всякой вектор-функции ограниченной вариации* $v(t)$ *существует аппроксимируемое решение* $x(t)$ *задачи Коши* (1.1), (1.2), *которое удовлетворяет интегральному уравнению*

$$x(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\xi, x(\xi), \int_{-\tau}^{0} h(x(\xi+s))dg(\xi,s))\, d\xi + \int_{t_0}^{t} B(\xi, x(\xi))\, dv^c(\xi) +$$

$$+ \sum_{t_i \leqslant t,\, t_i \in W_-} S(t_i, x(t_i-0), \Delta v(t_i-0)) + \sum_{t_i < t,\, t_i \in W_+} S(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i+0)),$$

где

$$S(t,x,\Delta v) = z(1) - z(0), \qquad \dot{z}(\xi) = B(t, z(\xi))\Delta v(t), \qquad z(0) = x.$$

§ 2. Непрерывная зависимость от начальных условий

Определение 2. Пусть последовательность начальных функций $\varphi_k(t)$ поточечно сходится к функции $\varphi(t)$, $x_k(t)$ — последовательность аппроксимируемых решений системы (1.1), порожденная последовательностью $\varphi_k(t)$, а $x(t)$ — аппроксимируемое решений той же системы, соответствующее начальной функции $\varphi(t)$. Будем говорить, что решение $x(t)$ непрерывно зависит от начальной функции $\varphi(t)$, если $\forall\, t \in [t_0, \vartheta]$ $x_k(t)$ поточечно сходится к $x(t)$ при $k \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть вектор-функция* $f(t,x,y)$ *и матрица-функция* $B(t,x)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1. *Тогда аппроксимируемое решение* $x(t)$ *системы* (1.1) *непрерывно зависит от начальной функции* $\varphi(t)$.

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
2. Завалищин С. Т., Сесекин А. Н. Импульсные процессы: Модели и приложения. М.: Наука, 1991.
3. Zavalishchin S. T., Sesekin A. N. Dynamic Impulse Systems. Theory and Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
4. Миллер Б. М., Рубинович Е. Я. Оптимизация динамических систем с импульсным управлением. М.: Наука, 2004.
5. Дерр В. Я., Кинзебулатов Д. М. Динамические обобщенные функции и проблема умножения // Известия вузов. Математика. 2007. № 5. С. 33–45.
6. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968.
7. Fetisova Y. V., Sesekin A. N. Discontinuous solutions of differential equations with time delay // WSEAS Transaction on Systems. 2005. Vol. 4, № 5. P. 487–492.
8. Анохин А. В. О линейных функционально-дифференциальных уравнениях с обобщенными возмущениями // Докл. АН СССР. Т. 286, №5. С. 1037–1040.
9. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
10. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 15.02.08

A. N. Sesekin, J. V. Fetisova
Dynamic systems with delay perturbed by impulses

The paper deals with formalization and description of solutions for the nonlinear system of functional-differential equations perturbed by impulses. The problem of continuous dependence on the initial function for such solutions is investigated.

Сесекин Александр Николаевич
Институт математики и механики
УрО РАН,
620219, Россия, Екатеринбург,
ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: sesekin@imm.uran.ru

Фетисова Юлия Валерьевна
Уральский государственный
технический университет – УПИ,
620002, Россия, Екатеринбург,
ул. Мира, 19
E-mail: j.v.fetisova@imm.uran.ru