ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.926

© *Т. В. Серёгина*

ПОСТРОЕНИЕ НЕПРАВИЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ [1]

Получено рекуррентное выражение для матрицы коэффициентов неправильной предельно-периодической системы.

Ключевые слова: линейная дифференциальная система, почти периодичность, правильность.

Одним из важнейших вопросов в теории линейных систем с почти периодическими коэффициентами следует считать классическую проблему Н. П. Еругина: все ли линейные дифференциальные системы с почти периодической матрицей коэффициентов являются правильными по Ляпунову? Эта проблема полностью решена В. М. Миллионщиковым в [1]: он доказал существование неправильных систем с предельно-периодической матрицей коэффициентов любого класса гладкости. А. В. Липницкий в работе [2], используя метод поворотов В. М. Миллионщикова, на основе идей работы [1] осуществил конструктивное построение неправильной системы с двумерной предельно-периодической матрицей коэффициентов любой степени гладкости. Но в работе А. В. Липницкого элементы предельно-периодической матрицы коэффициентов системы $A(t)$ не построены явно, а выражены через угловое поведение некоторого решения этой системы. В настоящей работе приведено рекуррентное выражение для матрицы коэффициентов неправильной предельно-периодической системы.

Зафиксируем семейство функций [1,2]

$$\{\xi(\cdot, T, u):\ T \geqslant 1,\ u \in \mathbb{R}\}$$

таких, что $\xi(\cdot, T, u) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ представляет собой T-периодическую функцию, принадлежащую классу $C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$ удовлетворяющую условиям

$$\int_0^T \xi(t)\, dt = 1,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06–01–000258).

и равную нулю всюду, кроме отрезков $[u+kT, u+1+kT]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Последовательности $\{s_k\}$, $\{p_k\}$ определим равенствами $s_k = 2^{k+1}$, $p_k = \prod\limits_{j=0}^{k} s_j = 2^{(k+1)(k+2)/2}$, $k = 0, 1, \ldots$, а последовательность $\{\theta_k\}$ — соотношениями $\theta_0 = 0$, $\theta_k = \sum\limits_{j=0}^{k-1} p_j$, $k = 1, 2, \ldots$. Через $U(\varphi)$, $\varphi \in \mathbb{R}$ обозначим матрицу поворота в $\mathbb{R}^2$ на угол φ в положительном направлении. Пусть $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ — некоторая последовательность неотрицательных вещественных чисел.

Определим двумерные p_k-периодические матрицы $A_k(t)$ формулами

$$\begin{aligned} &A_0(t) = \xi(t, 2, 1)\operatorname{diag}(-1, 1) + \xi(t, 2, 0)a_0 J, \\ &A_k(t) = \xi(t, p_k, \theta_k)a_k J, \quad k \geqslant 1, \end{aligned}$$

где $J \doteq U(-\pi/2)$.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t). \tag{2}$$

Системы такого вида использовались В. М. Миллионщиковым [1] и А. В. Липницким [2] для доказательства существования и построения неправильных почти периодических линейных систем.

Лемма 1. *Для матрицы Коши* $X(t, \tau)$ *системы* (1), (2) *справедливы равенства*

$$X(\theta_k, \theta_{k-1}) = X^{s_{k-1}}(\theta_{k-1}, \theta_{k-2})\, U(-a_{k-1}), \quad k > 1.$$

Пусть $\mu(y)$ — полярный угол вектора $y \neq 0 \in \mathbb{R}^2$. Введем обозначения:

$$\omega(X(t, \tau), \phi) \doteq \mu(X(t, \tau)y),$$

где $X(t, \tau)$ — матрица Коши системы (1),(2) и $\phi = \mu(y)$; $\varphi(t) \doteq \mu(x(t))$, где $x(\cdot)$ — некоторое решение системы (1),(2). Тогда [2]

$$\omega(X(\theta_1, \theta_0), \phi) = \operatorname{arctg}(e^2 \operatorname{tg}(\phi - a_0)),$$

поэтому

$$\varphi(\theta_1) = \mu(X(\theta_1, \theta_0)x(\theta_0)) = \operatorname{arctg}(e^2 \operatorname{tg}(\varphi(\theta_0) - a_0)). \tag{3}$$

Для значений $\varphi(\theta_k)$ при $k > 1$ из леммы 1 получаем следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $x(\cdot)$ — *произвольное нетривиальное решение системы* (1), (2); $\varphi(t) = \mu(x(t))$ — *полярный угол вектора* $x(t)$. *Тогда имеют место равенства*

$$\varphi(\theta_k) = \psi^k_{s_k}, \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{4}$$

где величины ψ^k_j, $j = 0, 1, \ldots, s_k$, *задаются рекуррентно сотношениями*

$$\begin{aligned} &\psi^k_0 = \varphi(\theta_{k-1}) - a_{k-1}, \\ &\psi^k_j = \omega\left(X(\theta_{k-1}, \theta_{k-2}), \psi^k_{j-1}\right), \ j = 1, \ldots, s_k. \end{aligned} \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *построена согласно условиям*

$$a_0 \in (0, 2\operatorname{arctg} e - \pi/2),$$

$$a_k = 2|\varphi(\theta_k) - \varphi(\theta_{k-1})|, \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\varphi(\theta_0) = \pi/4 + a_0/2$, $\varphi(\theta_1)$ *задано равенством* (3), *а* $\varphi(\theta_k)$ *при* $k \geqslant 2$ — *соотношениями* (4), (5). *Тогда* $A(\cdot) \in C^{\infty}\big(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{R})\big)$, *а система* (1), (2) — *неправильная и почти периодическая.*

* * *

1. Миллионщиков В. М. Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 3. С. 391–396.
2. Липницкий А. В. О решении В. М. Миллионщиковым проблемы Еругина // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 35, № 12. С. 1615–1620.

Поступила в редакцию 25. 02. 08

T. V. Seriogina

Construction of the irregular limit periodic system of linear differential equations

The recursion relation has been obtained for the coefficient matrix of the irregular limit periodic system.

Серёгина Татьяна Владимировна
Удмуртский государственный
университет
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 4)
E-mail: imi@uni.udm.ru