ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.958

© *А. Ю. Сазонов, Ю. Г. Фомичева*

О СВОЙСТВАХ ВЕСОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА B-ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ [1]

Рассматриваются весовые потенциалы для эллиптического оператора второго порядка, содержащего по части переменных дифференциальный оператор Бесселя. Приведена теорема существования потенциала двойного слоя и некоторые свойства потенциалов простого, двойного слоя и объемного.

Ключевые слова: потенциал, оператор Бесселя, эллиптический оператор, сингулярный оператор.

Пусть Ω^+ — область в $\mathbb{R}_+^{n+m}$, ограниченная гиперплоскостями $y_i = 0$, $i = \overline{1,m}$ и произвольной поверхностью типа Ляпунова Γ^+, образующей с гиперплоскостями $y_i = 0$ углы, равные $\pi/2$,

$$\mathbb{R}_+^{n+m} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{n+m} : y_i > 0, i = \overline{1,m}\},$$

$\overline{\Gamma^0}$ — замыкание оставшейся части границы области Ω^+.

В области Ω^+ рассматривается оператор

$$B_{y'} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^{-k_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(y_i^{k_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \right),\ a_{ij} = a_{ji},\ k_i > 0,$$

удовлетворяющий условию B-эллиптичности [1, с. 275–278]: существует $\delta > 0$ такое, что для любого ненулевого $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m})$ имеет место неравенство $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\alpha_i\alpha_j + \sum\limits_{i=1}^{m} b_i \alpha_{n+i}^2 \geqslant \delta\, |\alpha|^2$, $y' = (y_1, \ldots, y_m)$.

Фундаментальное решение уравнения $B_{y'}(\cdot) = 0$ определяется следующим образом: при $x = 0$

$$H(0,\xi) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} A^{-1} A_{ij} \xi_i \xi_j + \sum_{i=1}^{m} b_i^{-\frac{1}{2}} \eta_i^2 \right)^{\frac{2-n-m-\sum\limits_{i=1}^{m} k_i}{2}},$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 07–01–00305).

при $x \in \mathbb{R}_{+}^{n+m}$

$$H(x,\xi) = C\int_0^{\pi}\dots\int_0^{\pi}\sin^{k_1-1}t_1\dots\sin^{k_m-1}t_m\Big(\sum_{i,j=1}^{n}A^{-1}A_{ij}(\xi_i-x_i)(\xi_j-x_j)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}b_i^{-\frac{1}{2}}(\eta_i^2+y_i^2-2\eta_i y_i\cos t_i)\Big)^{\frac{2-n-m-\sum\limits_{i=1}^{m}k_i}{2}}dt_1\dots dt_m,$$

где $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_m) = (\xi',\eta') \in \mathbb{R}_{+}^{n+m}$, $C > 0$, $A = \det(a_{ij})$, A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Для оператора $B_{y'}$ определим следующие весовые потенциалы:

$$u(\xi) = \int\limits_{\Gamma^+}H(x,\xi)\mu(x)y_1^{k_1}\dots y_m^{k_m}d\Gamma^+,$$

$$v(\xi) = \int\limits_{\Gamma^+}a\frac{dH(x,\xi)}{d\nu_x}\sigma(x)y_1^{k_1}\dots y_m^{k_m}d\Gamma^+,$$

$$w(\xi) = \int\limits_{\Omega^+}H(x,\xi)\rho(x)y_1^{k_1}\dots y_m^{k_m}dx,$$

где $u(\xi)$, $v(\xi)$, $w(\xi)$ — потенциалы простого, двойного слоя и объемный потенциал соответственно, $\mu(x)$, $\sigma(x)$, $\rho(x)$ — плотности потенциалов, n_x — внешняя нормаль, ν_x — конормаль к поверхности Γ^+ в точке x,

$$a\cos(\nu_x,x_i) = \sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cos(n_x,x_i),\quad a\cos(\nu_x,y_i) = b_i\cos(n_x,y_i),$$

$$a^2 = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cos(n_x,x_i)\Big)^2+\sum_{i=1}^{m}b_i^2\cos^2(n_x,y_i).$$

Теорема 1. *Пусть $\sigma(x),\mu(x) \in C(\Gamma^+)$, $\rho(x) \in C(\overline{\Omega^+})$. Тогда потенциал двойного слоя $\nu(\xi)$ существует и справедливы равенства*

$$\nu_e^i(\xi_0) = \mp\frac{\sigma(\xi_0)}{2}+v(\xi_0),\qquad \left(\frac{du(\xi_0)}{d\nu_x}\right)_e^i = \pm\frac{\mu(\xi_0)}{2a}+u(\xi_0),$$

где $\xi_0 \in \Gamma^+$ — произвольная фиксированная точка,

$$B_{\eta'}w(\xi) = \int\limits_{\Omega^+}B_{\eta'}H(x,\xi)\rho(x)y_1^{k_1}\dots y_m^{k_m}dx$$

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

при $\xi \notin \Omega^+ \cup \overline{\Gamma^0}$,

$$B_{\eta'} w(\xi) = -\rho(\xi) + \int\limits_{\Omega^+} B_{\eta'} H(x,\xi)\rho(x) y_1^{k_1} \ldots y_m^{k_m} dx$$

при $\xi \in \Omega^+ \cup \overline{\Gamma^0}$.

Индексами i *и* e *обозначены предельные значения потенциалов на* Γ^+ *изнутри и извне области* Ω^+ .

* * *

1. Киприянов И. А. О краевых задачах для уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя // ДАН СССР. 1964. Т. 158, № 2. С. 275–278.

Поступила в редакцию 06.02.08

A. Yu. Sazonov, Yu. G. Fomicheva

On some properties of the weight potentials for one class of B-elliptic operators

The weight potentials are considered for the second order elliptic operator including the Bessel differential operator by some variables. The existence theorem for the double layer potential is stated. Some properties of the simple potential, double layer potential and volume potential are studied.

Сазонов Анатолий Юрьевич
Тамбовский государственный университет,
392000, Россия, г. Тамбов,
ул. Интернациональная, 33
E-mail: aib@tsu.tmb.ru

Фомичева Юлия Геннадьевна
Тамбовский государственный университет,
392000, Россия, г. Тамбов,
ул. Интернациональная, 33
E-mail: fomichevajulia@mail.ru