ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.935

© *С. С. Рублева*

О МОДИФИКАЦИИ ОДНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА, ГАРАНТИРУЮЩЕГО ВОССТАНОВЛЕНИЕ УПРАВЛЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С ВЫРОЖДЕННОЙ МАТРИЦЕЙ

Рассматриваются свойства одного метода динамической регуляризации для задачи восстановления управления в динамической системе, нелинейной по времени и состоянию и линейной по управлению. Получена асимптотическая оценка точности для случая, когда матрица коэффициентов при управлении имеет постоянный образ. Рассмотрена возможность получения гарантированных оценок для случая, когда изменение образа матрицы коэффициентов не сопровождается стремлением к нулю ее минимального ненулевого сингулярного числа.

Ключевые слова: динамическая регуляризация, асимптотический порядок точности.

Рассматривается задача восстановления неизвестного возмущения $v(t)$, действующего на динамическую систему

$$x'(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))v(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, T]$$

по неточной информации $\xi(t_i)$ о движении: $\|x(t_i) - \xi(t_i)\| \leqslant h$ (t_i — узлы разбиения $[t_0, T]$, $t_{i+1} - t_i = \Delta$). Здесь отображения f_1 и f_2 действуют из $[t_0, T] \times \mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^m$ и в пространство матриц $m \times q$ со спектральной нормой соответственно; значения $v(t)$ принадлежат выпуклому компакту $Q \subset \mathbb{R}^q$, каждое значение $x(t)$ является внутренней точкой компакта $X \subset \mathbb{R}^m$.

Для решения этой задачи будем придерживаться подхода, предложенного в Ю. С. Осиповым и А. В. Кряжимским [1], который при условии липшицевости $f_1(\cdot), f_2(\cdot)$ позволяет формировать приближение управления в виде кусочно-постоянной функции $u_h(\cdot)$ в режиме реального времени за счет управления вспомогательной системой моделью $w_h(\cdot)$. Состояние модели в узлах разбиения определяется правилом

$$w_h(t_{i+1}) = w_h(t_i) + \big(f_1(t_i, \xi(t_i)) + f_2(t_i, \xi(t_i))u_i\big)\Delta, \quad w_h(t_0) = \xi(t_0),$$

где $u_h(t) = u_i$ — проекция вектора

$$\frac{1}{\alpha(h)} f_2^T(t_i, \xi(t_i))(w_h(t_i) - \xi(t_i))$$

на компакт Q, $\alpha(h):[0,\infty)\to[0,\infty)$. В той же работе было установлено, что при условии согласования параметров указанный динамический алгоритм $(D_h^{(1)})$ является регуляризирующим, то есть $\|u_h(t)-v_*(t)\|_{L_2[t_0,T]}$ стремится к нулю вместе с h, где $v_*(t)$ — управление, порождающее движение $x(t)$, обладающее минимальной нормой.

В работе устанавливается, что упомянутый метод позволяет получать гарантированные оценки в пространстве $L_{1[t_0,T]}$, не используя процедуру проектирования на компакт, при условии постоянства подпространства собственных векторов матрицы $A(\cdot)=f_2(\cdot)f_2^T(\cdot)$ вдоль движения.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия из работы* [1], *подпространство собственных векторов матрицы* $A(t)$ *постоянно,* $v_*(t)$ *обладает ограниченной вариацией на* $[t_0,T]$ *и принимает значения из компакта* Q, $\alpha=\alpha(h)$, $\delta=\delta(h)$, $\dfrac{h}{\alpha}$, $\dfrac{\alpha}{\delta}$ *стремятся к нулю вместе с* h, $\Delta=h$, $k\in N$. *Тогда существуют положительные константы* K_1, K_2, K_3 *и* $h_1(k)>0$ *такие, что для любых* $h\in[0,h_1(k))$ *справедлива оценка*

$$\|v_*(t)-u_h(t)\|_{L_1[t_0,T]}\leqslant\frac{h}{\alpha}K_1+\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^kK_2+\delta K_3, \tag{1}$$

где константы K_1, K_2, K_3 *выписываются конструктивно.*

Заметим, что счет выбора k, δ и α асимптотический порядок точности может быть сделан сколь угодно близким к $1/2$.

При получении указанной оценки временной промежуток разбивается на две части: $[t_0,t]=[t_0,t-\delta)\cup[t-\delta,t]$, при этом на первом промежутке существенно используется неизменность подпространства собственных векторов $A(\cdot)$, что позволяет отделить от нуля минимальное ненулевое собственное число $A(\cdot)$. Однако в случае смены ранга не удается получить оценку указанным способом. Поэтому, следуя подходу, анонсированному в [2], предлагается модификация $D_h^{(2)}$, суть которой состоит в следующем: алгоритм $D_h^{(1)}$ применяется на укороченных промежутках $[t_i,t_i+\delta)$ при $t_i+\delta<t$, с начальными условиями для систем-моделей $w_h(t_i)=\xi(t_i)$, при этом на промежутке $[t_0,t_0+\delta)$ результат действия $D_h^{(2)}$ совпадает с $D_h^{(1)}$.

Теорема 2. *Пусть ранг* $f_2(t,x(t))$, $t\in[t_0,T]$ *меняется лишь в конечном числе точек, где нарушается ее непрерывность, а внутри полученных интервалов, на которые разбивается промежуток* $[t_0,T]$ *точками разрыва, выполняются условия теоремы* 1. *Тогда для любого* $p\in(0,1/2)$ *существуют* $h_2>0$ *и* $K_4>0$ *такие, что для всех* $h\in[0,h_2)$

$$\|v_*(t)-u_h(t)\|_{L_1[t_0,T]}\leqslant K_4h^{1/2-p}, \tag{2}$$

где константа K_4 *выписывается конструктивно.*

Без ограничения общности предположим, что имеется одна точка t_* смены ранга, которая является внутренней. В связи с тем, что априори она нам неизвестна, для $D_h^{(2)}$ становится существенной процедура проектирования на компакт. При этом для доказательства теоремы разобьем $[t_0, T]$ на три части: $[t_0, t_* - \delta) \cup [t_* - \delta, t_* + \delta) \cup [t_* + \delta, T]$. Для первого и последнего промежутков справедлива оценка теоремы 1, тогда как для второго, в силу проектирования выполнено $\|v_*(t) - u_h(t)\|_{L_1[t_*-\delta, t_*+\delta]} \leqslant 2\delta K_5$ ($K_5 > 0$). Переходя к оценке на всем промежутке, получаем требуемый результат.

* * *

1. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. О моделировании управления в динамической системе // Техн. Кибернетика (Изв. АН СССР). 1983. № 2. С.51–60.
2. Вдовин А.Ю., Ким А.В., Рублева С.С. Об асимптотической точности в L_1 одного динамического алгоритма восстановления возмущения // Труды ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2006. Т. 12, №. 2. С. 18–26.

Поступила в редакцию 20. 02. 08

S. S. Rubleva

About modification of one dynamic algorithm guaranteeing the restoration of control in a dynamic system with singular matrix

The paper deals with the properties of one method of dynamic regularization for the problem of restoration of control in a dynamic system, nonlinear in time and state and linear in control. The asymptotic estimation of accuracy has been obtained for the case where the matrix of factors at control has a constant image. The possibility of obtaining guaranteed estimations is considered for the case where the change in the image of a matrix of factors is not accompanied by tending to zero of its minimal nonzero singular value.

Рублева Светлана Сергеевна
Уральский государственный
лесотехнический университет
206001, Россия, г. Екатеринбург,
ул. Сибирский тракт, 36
E-mail: rublevas@mail.ru