ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 62-50

© *В. С. Пацко, В. Л. Турова*

ИГРА «ШОФЕР-УБИЙЦА» И ЕЕ МОДИФИКАЦИИ [1]

Приводится обзор работ, связанных с дифференциальной игрой «шофер-убийца».

Ключевые слова: дифференциальные игры быстродействия, игра «шофер-убийца».

§ 1. Классическая задача

Игра «шофер-убийца» предложена Р. Айзексом и описана в его отчете [14] для RAND Corporation в 1951 г. В этой задаче «автомобиль» с ограниченным снизу радиусом разворота и постоянной по величине линейной скоростью преследует безынерционного «пешехода», скорость которого не превышает заданного значения. Слова «автомобиль», «пешеход» и название «шофер-убийца» оказались на редкость удачными, хотя в качестве реальных объектов Р. Айзекс подразумевал [10, с. 543] управляемую торпеду и увертывающийся от неё небольшой катер.

Обозначим игроков буквами P и E. Описание динамики:

$$\begin{array}{llll} P: & \dot{x}_p = w\sin\theta, & E: & \dot{x}_e = v_1, \\ & \dot{y}_p = w\cos\theta, & & \dot{y}_e = v_2, \\ & \dot{\theta} = wu/R,\ |u| \leqslant 1; & & v = (v_1, v_2)',\ |v| \leqslant \rho. \end{array} \tag{1}$$

Здесь w — величина линейной скорости, R — минимальный радиус разворота. Нормируя время и геометрические координаты, можно считать, что $w = 1$, $R = 1$. Совмещая начало относительной системы координат с игроком P и направляя ось y по вектору его скорости, перейдем [1] к системе

$$\begin{array}{l} \dot{x} = -yu + v_x, \\ \dot{y} = xu - 1 + v_y; \\ |u| \leqslant 1,\ v = (v_x, v_y)',\ |v| \leqslant \nu. \end{array} \tag{2}$$

Цель игрока P, распоряжающегося управлением u, — привести фазовый вектор как можно скорее на терминальное множество M — круг

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты 06–01–00414, 07–01–96085).

радиуса r с центром в начале координат. Второй игрок, распоряжающийся управлением v, препятствует этому. Управления строятся по принципу обратной связи.

Р. Айзекс исследовал задачу шофер-убийца при помощи своего метода [1], основой которого является попятное построение (начиная с границы терминального множества) характеристик для соответствующего уравнения в частных производных первого порядка, заполнение ими первичной регулярной области, затем вторичной и так далее. Разделение регулярных областей производится при помощи сингулярных линий. В задаче шофер-убийца им были обнаружены рассеивающая, универсальная и экивокальная сингулярные линии. Полностью решить задачу Р. Айзексу не удалось.

Полное решение на основе усовершенствованного метода Айзекса было получено Э. Мерцем в его диссертации [19], выполненной под руководством Дж. Бреквелла. Э. Мерц проделал полный анализ характера оптимальных движений, описал сингулярные линии и установил закономерность их изменения в зависимости от параметров r, ν. При исследовании задачи им были открыты сингулярные линии, которые он назвал фокальными (оптимальные движения подходят с касанием с двух сторон к сингулярной линии и идут по ней). К сожалению, материалы Дж. Бреквелла и Э. Мерца по задаче шофер-убийца опубликованы [4, 9] лишь частично и очень кратко. Диссертация Э. Мерца доступна в библиотеке Стэнфордского университета.

§ 2. Игра сопровождения–уклонения

В диссертации [16] Дж. Левина, статье [17] Дж. Левина и Дж. Бреквелла, а также в статье [18] Дж. Левина и Г. Олсдера динамика и ограничения на управления игроков по-прежнему удовлетворяют (после перехода к относительным координатам) соотношениям (2), но цели игроков другие. Теперь игрок E пытается как можно скорее привести фазовый вектор на терминальное множество M, игрок P препятствует этому. В качестве множества M в работах [16, 17] взято дополнение до открытого круга с центром в нуле, а в статье [18] — дополнение до открытого связного конуса с вершиной в нуле. Содержательный смысл применительно к исходному описанию (1): игрок E пытается как можно скорее выйти из геометрически связанной с положением игрока P зоны обнаружения («обстрела»), игрок P, наоборот, старается продержать противника как можно дольше в этой зоне. В одном случае такая зона — круг, в другом — конус.

При исследовании задачи «сопровождения – уклонения» авторы работ [16, 17, 18] также использовали методику Айзекса. В рассматриваемой задаче типичными являются ситуации сгущения линий уровня (изохрон) функции цены, когда происходит переход от конечных значений функции цены к бесконечному значению.

§ 3. Акустическая задача

Вернемся к задачам, где игрок P минимизирует, а игрок E максимизирует время перевода на терминальное множество M. В работах [11, 12] М. Квинкампуа, П. Кардалиаге и П. Сен-Пьер рассмотрели «акустический» вариант игры шофер-убийца, предложенный П. Бернаром [8]. Предполагается, что в системе (2) ограничение ν на управление игрока E зависит от состояния (x, y). А именно,

$$\nu(x,y) = \nu^* \min\left\{1, \sqrt{x^2+y^2}/s\right\}, \ s > 0.$$

Прикладной аспект: объект E не должен сильно «шуметь», если расстояние между ним и объектом P меньше заданного числа s. Авторы публикаций [11, 12] исследовали акустическую задачу при помощи разработанного ими метода численного решения дифференциальных игр, восходящего к теории выживаемости [6]. Было обнаружено, что если для системы (2) с ограничением $|v| \leqslant \nu(x,y)$, наложенным на игрока E, в качестве терминального множества взять прямоугольник, вытянутый вдоль оси x, то внутри множества состояний, где цена игры конечна, образуется «дырка», для любой точки которой цена игры бесконечна. Аккуратное теоретическое описание геометрии такой дырки и просчет (аналитический или численный) функции цены вблизи её границы представляется весьма сложной задачей.

§ 4. Игра с усложненной динамикой автомобиля

Модель динамики игрока P в системе (1) — простейшая среди используемых в математической литературе для описания движения автомобиля (или самолета в горизонтальной плоскости). Траекториями движения являются линии ограниченной кривизны. В статье [3] А. А. Маркова, опубликованной в 1889 г., рассмотрены четыре задачи, связанные с оптимизацией на линиях ограниченной кривизны. Первая из них [3, с. 250] может быть истолкована как задача управления по быстродействию автомобилем с динамикой игрока P в системе (1). Трактовку в рамках задачи быстродействия для такого автомобиля допускает и основная теорема [13, с. 515] статьи Л. Дубинса 1957 г. В работах по теоретической робототехнике [15] объект с динамикой игрока P из (1) называют «автомобиль Дубинса» (Dubins' car).

Следующей по сложности является модель автомобиля из статьи Дж. Ридса и Л. Шеппа [24]:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_p = w\sin\theta, \\ &\dot{y}_p = w\cos\theta, \\ &\dot{\theta} = u; \qquad\qquad |u| \leqslant 1,\ |w| \leqslant 1. \end{aligned}$$

Управление u определяет угловую скорость перемещения. При помощи управления w мгновенно изменяется величина линейной скорости. В частности, автомобиль мгновенно может изменить направление своего движение на противоположное. Безынерционное изменение величины линейной скорости есть математическая идеализация, но «для медленно передвигающихся объектов это представляется разумным компромиссом, чтобы достичь удобства вычислений» [24, с. 373]. Естественно рассмотреть задачи, где диапазон изменения управления w имеет вид $[a, 1]$, при этом $a \in [-1, 1]$ — параметр задачи. Если $a = 1$, получаем автомобиль Дубинса, при $a = -1$ — автомобиль Ридса и Шеппа.

Заменим в (1) автомобиль Дубинса автомобилем Ридса и Шеппа. Переходя к относительным координатам, получим

$$\begin{gathered} \dot{x} = -yu + v_x, \\ \dot{y} = xu - w + v_y; \\ |u| \leqslant 1,\ w \in [a, 1],\ v = (v_x, v_y)',\ |v| \leqslant \nu. \end{gathered} \tag{3}$$

Управленими u, w распоряжается игрок P, управлением v — игрок E.

В работе [21] приведены результаты численного исследования множеств уровня функции цены игры шофер-убийца с динамикой (3) в зависимости от параметра a. Исследование проведено при помощи разработанного авторами алгоритма построения множеств уровня функции цены. Используется идеология Екатеринбургской школы [2] по теории дифференциальных игр.

§ 5. Игра шофер-убийца как тестовый пример

В настоящее время интенсивно разрабатываются вычислительные методы и алгоритмы решения антагонистических дифференциальных игр. Часто игра шофер-убийца используется как тестовый или демонстрационный пример. Укажем некоторые [5, 7, 20, 22, 23] из таких работ. Привлекательность игры связана не только с ее явной прикладной интерпретацией, но также и с тем, что после перехода к относительным координатам фазовый вектор является двумерным. Стало быть, для решения задачи можно применять как алгоритмы общего вида, так и учитывающие специфику плоскости. При этом нетривиальность динамики обусловлена тем, что управление u входит в правую часть двумерной системы в виде сомножителя при фазовых переменных, а ограничение на управление v может зависеть от фазового состояния. В модификации, приведенной в § 4, управление игрока P является двумерным. Терминальное множество в задаче, обсуждаемой в § 2, не обязательно выпуклое.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967 (Isaacs R. Differential games. N.Y.: John Wiley. 1965).
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. Марков А. А. Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сообщения Харьковского математического общества. 1889. Сер. 2, 1, № 5, 6. С. 250–276 .
4. Мерц Э. Об игровой задаче «шофер-убийца» // Ракетная техника и космонавтика (Журн. амер. инст. аэрон. и космон.). 1974. Т. 12, № 3. С. 5–7 (Merz A. W. The homicidal chauffeur //AIAA Journal. 1974. Vol. 12. № 3. P. 259–260).
5. Михалев Д. К., Ушаков В. Н. О двух алгоритмах приближенного построения множества позиционного поглощения в игровой задаче сближения // Автоматика и телемеханика. 2007. № 11. С. 178–194.
6. Aubin J.-P. A survey of viability theory // SIAM J. Contr. Opt. 1990. Vol. 28, № 4. P. 749–788.
7. Bardi M., Falcone M., Soravia P. Numerical methods for pursuit-evasion games via viscosity solutions. In M. Bardi, T. E. S. Raghavan, T. Parthasarathy (eds.), Stochastic and Differential Games Theory and Numerical Methods, Annals of the Int. Soc. of Dynamic Games. Boston: Birkhäuser, 1999. Vol. 4. P. 105–175.
8. Bernhard P., Larrouturou B. Etude de la barriere pour un probleme de fuite optimale dans le plan. Rapport de Recherche. Sophia-Antipolis: INRIA, 1989.
9. Breakwell J. V., Merz A. W. Toward a complete solution of the homicidal chauffeur game // Proc. of the 1st Int. Conf. on the Theory and Application of Differential Games, Amherst, Massachusetts, 1969. P. III-1–III-5.
10. Breitner M. The genesis of differential games in light of Isaacs' contributions // J. Opt. Theory Appl. 2005. Vol. 124, № 3. P. 523–559 .
11. Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P. Numerical methods for optimal control and differential games. Ceremade CNRS URA 749. University of Paris – Dauphine, 1995.
12. Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P. Set-valued numerical analysis for optimal control and differential games. In M. Bardi, T. E. S. Raghavan, and T. Parthasarathy (eds.), Stochastic and Differential Games: Theory and Numerical Methods, Annals of the Int. Soc. of Dynamic Games. Boston: Birkhäuser. 1999. Vol. 4. P. 177–247.
13. Dubins L. E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents // Amer. J. Math. 1957. Vol. 79. P. 497–516.

14. Isaacs R. Games of pursuit. Scientific report of the RAND Corporation. Santa Monica. 1951.
15. Laumond J.-P. (ed.) Robot motion planning and control // Lect. Notes in Contr. and Inform. Sci. Vol. 229. N.Y.: Springer. 1998.
16. Lewin J. Decoy in pursuit-evasion games: PhD Thesis. Stanford University, 1973.
17. Lewin J., Breakwell J. V. The surveillance-evasion game of degree // J. Opt. Theory Appl. 1975. Vol. 16, № 3–4. P. 339–353.
18. Lewin J., Olsder G. J. Conic surveillance evasion //J. Opt. Theory Appl. 1979. Vol. 27, № 1. P. 107–125.
19. Merz A. W. The homicidal chauffeur – a differential game: PhD Thesis. Stanford University, 1971.
20. Mitchell I. Application of level set methods to control and reachability problems in continuous and hybrid systems: PhD Thesis. Stanford University, 2002.
21. Patsko V. S., Turova V. L. Numerical study of the homicidal chauffeur differential game with the reinforced pursuer // Game Theory and Applications. Vol. 12. N.Y.: Nova Science Publishers. 2007. P. 123–152.
22. Patsko V. S., Turova V. L. Level sets of the value function in differential games with the homicidal chauffeur dynamics // Int. Game Theory Review. 2001. Vol. 3, № 1. P. 67–112.
23. Raivio T. , Ehtamo H. On numerical solution of a class of pursuit-evasion games. In J. A. Filar, K. Mizukami and V. Gaitsgory (eds.), Annals of the Int. Soc. of Dynamics Games. Boston: Birkhäuser, 2000. Vol. 5. P. 177–192.
24. Reeds J. A., Shepp L. A. Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards // Pacific J. Math. 1990. Vol. 145, № 2. P. 367–393.

Поступила в редакцию 04. 02. 08

V. S. Patsko, V. L. Turova

Homicidal chauffeur game and its modifications

The paper gives a survey of a literature related to the homicidal chauffeur differential game.

Пацко Валерий Семенович
Институт математики
и механики УрО РАН,
620219, Россия, Екатеринбург,
ГСП-384, ул. С.Ковалевской, 16
E-mail: patsko@imm.uran.ru

Турова Варвара Леонидовна
Mathematical Centre, M6
Munich Technical University
Boltzmannstr. 3
85748 Garching, Germany
E-mail: turova@ma.tum.de