ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.911/517.93

© *Е. А. Панасенко, Л. И. Родина, Е. Л. Тонков*

ПОГЛОЩАЕМОСТЬ, НЕБЛУЖДАЕМОСТЬ И РЕКУРРЕНТНОСТЬ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ[1]

Исследуются условия, при которых множество достижимости управляемой системы поглощается заданным множеством, обладает свойством неблуждаемости, рекуррентности или эргодичности.

Ключевые слова: управляемые системы, динамические системы, дифференциальные включения, достижимость, инвариантность, неблуждаемость, рекуррентность, эргодичность.

Введение

Пусть (Σ, h^t) — фиксированная топологическая динамическая система[2] с *компактным* фазовым пространством Σ, $f(\sigma, x, u)$ — *непрерывная* функция переменных $(\sigma, x, u) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, удовлетворяющая *локальному условию Липшица* по переменной x равномерно относительно (σ, u) на множестве $\Sigma \times U$, где U — заданное *компактное* множество в $\mathbb{R}^m$.

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = \int_U f(h^t\sigma, x, u)\eta_t(du), \tag{0.1}$$

где η_t — *допустимое* управление[3] и отвечающее системе (0.1) дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad F(\sigma, x) = \operatorname{co} f(\sigma, x, U). \tag{0.2}$$

Здесь $\operatorname{co} A$ — замыкание выпуклой оболочки множества A.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 07-01-00305 и 06-01-00258).

[2]То есть h^t — однопараметрическая группа преобразований фазового пространства Σ в себя, непрерывная по (t, σ) (см. [1, 2]).

[3]Функция $t \to \eta_t$ называется *допустимым управлением*, если при каждом t η_t — вероятностная мера Радона с носителем в U и для любой непрерывной функции $a(u)$, функция $t \to \displaystyle\int_U a(u)\eta_t(du)$ измерима по Лебегу (см. [3, 4] и библиографию в [4]).

Введём в рассмотрение метрическое пространство $\Omega = \Sigma \times \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, где $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ — пространство непустых компактных подмножеств в $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа dist. Обозначим далее $A(t,\omega)$, где $\omega = (\sigma, X) \in \Omega$, $t \geqslant 0$, *множество достижимости*[4] системы (0.1) в момент времени t из начального множества X. В силу высказанных предположений, *найдётся такое $\varepsilon > 0$, что при всех $t \in [0,\varepsilon)$ множество достижимости существует, компактно при каждом t и непрерывно по (t,ω)*. Кроме того, $A(t,\omega)\big|_{t=0} = X$ и $A(t+s,\omega) = A\big(t, h^s\sigma, A(s,\omega)\big)$ при всех допустимых t и s. Поэтому, если каждое решение включения (0.2) существует при всех $t \in \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, то функция $g^t : \Omega \to \Omega$, определенная равенством $g^t\omega = \big(h^t\sigma, A(t,\omega)\big)$, задаёт полупоток на Ω и, следовательно, пара (Ω, g^t) образует топологическую динамическую систему. Эта динамическая система служит *расширением* (см. [2]) системы (Σ, h^t).

§ 1. Статистическая теорема сравнения

Пусть задана непрерывная функция $\mathbb{A}\colon \mathbb{R} \times \Omega \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ переменных (t,ω), $\omega = (\sigma, X)$, удовлетворяющая условиям[5]

$$\mathbb{A}(t,\omega)\big|_{t=0} = X,\ \mathbb{A}(t+s,\omega) = \mathbb{A}\big(t, h^s\sigma, \mathbb{A}(s,\omega)\big) = \mathbb{A}\big(t, g^s\omega\big),\ t,s \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

О п р е д е л е н и е 1. Фиксируем $X_0 \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, и для каждого $X \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ и всех $\sigma \in \Sigma$ введём в рассмотрение характеристику

$$\mathrm{freq}(\omega) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0,\vartheta] : A(t,\omega) \subseteq \mathbb{A}(t,\omega_0)\}}{\vartheta}, \quad \omega_0 = (\sigma, X_0), \quad (1.2)$$

которую будем называть *относительной частотой поглощения* (relation absorption frequency) множества достижимости $A(t,\omega)$ множеством $\mathbb{A}(t,\omega_0)$.

Пусть $\mathfrak{M}(\sigma) \doteq \big\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\colon x \in \mathbb{A}(t,\omega_0)\big\}$, и для заданного $r > 0$ $\mathfrak{M}^r(\sigma) \doteq \big\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\colon \rho\big(x, \mathbb{A}(t,\omega_0)\big) < r\big\}$, $\mathfrak{N}^r(\sigma) \doteq \mathfrak{M}^r(\sigma) \setminus \mathfrak{M}(\sigma)$.

Скалярную функцию $V(t,\sigma,x)$ переменных (t,σ,x) будем называть *функцией Ляпунова*, если она локально липшицева по (t,x) равномерно относительно $\sigma \in \Sigma$; $V(t,\sigma,x) = 0$ для каждого $\sigma \in \Sigma$ и всех (t,x) на границе множества $\mathfrak{M}(\sigma)$ и если $V(t,\sigma,x) > 0$ для всех $(t,x) \in \mathfrak{N}^r(\sigma)$[6].

---

[4] Множество достижимости (attainable set) $A(t,\omega)$ системы (0.1) совпадает с сечением в момент времени $t \geqslant 0$ *интегральной воронки* $S(t,\omega)$ включения (0.2), когда начальное состояние $x(0)$ пробегает всё X.

[5] В качестве $\mathbb{A}$ может выступать интегральная воронка вспомогательного дифференциального включения $\dot{x} \in \mathbb{F}(h^t\sigma, x)$, играющего роль *включения сравнения*.

[6] Например, функция $V(t,\sigma,x) = \rho(x, \mathbb{A}(t,\omega_0))$, где $\rho(x,A)$ — расстояние от точки x до множества A, будет функцией Ляпунова, если она локально липшицева по (t,x).

Далее, для локально липшицевой функции $V(t,\sigma,x)$ *обобщенной производной* в точке (t,x) по направлению вектора $(1,q)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ (производной Ф. Кларка) называется следующий верхний предел

$$V^o(t,\sigma,x;q)\doteq\limsup_{(\tau,y,\varepsilon)\to(t,x,+0)}\frac{V(\tau+\varepsilon,\sigma,y+\varepsilon q)-V(\tau,\sigma,y)}{\varepsilon},\tag{1.3}$$

а выражение $V^o_F(t,\sigma,x)\doteq\max\limits_{q\in F(h^t\sigma,x)}V^o(t,\sigma,x;q)$ — *производной функции* V *в силу включения* (0.2).

У с л о в и е 1. Для некоторого $r>0$ существуют функция Ляпунова V и непрерывная функция $w:\Sigma\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такие, что для каждого $\sigma\in\Sigma$ и всех $(t,x)\in\mathfrak{N}^r(\sigma)$ выполнено неравенство $V^o_F(t,\sigma,x)\leqslant w\big(h^t\sigma,V(t,\sigma,x)\big)$ и для каждого $\sigma\in\Sigma$ существует предел

$$\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:z(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta}=\varkappa(\sigma),$$

где $z(t,\sigma)$ — верхнее решение задачи

$$\dot z=w(h^t\sigma,z),\quad z(0)=0,\quad t\geqslant 0.\tag{1.4}$$

Теорема 1. *Предположим, что* X_0 *фиксировано,* $X\in\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, *множество достижимости* $A(t,\omega)$ *определено при всех* $t\geqslant 0$ *и* $\sigma\in\Sigma$ *и выполнено условие* 1. *Тогда относительная частота поглощения удовлетворяет неравенству* $\operatorname{freq}(\omega)\geqslant\varkappa(\sigma)$.

Следствие 1. [7] *Если выполнено условие* 1 *и верхнее решение задачи* (1.4) *неположительно при каждом* $t\geqslant 0$, *то для всякого* $X\subset X_0$ *и любого* $\sigma\in\Sigma$ *множество достижимости* $A(t,\omega)$ *определено при всех* $t\in\mathbb{R}_+$ *и* $A(t,\omega)$ *поглощается множеством* $\mathbb{A}(t,\omega_0)$ *при каждом* $t\geqslant 0$. [8]

Метрической динамической системой [2, с. 156] называется четверка $(\Omega,\mathfrak{B},\mu,g^t)$, где Ω — полное метрическое пространство; $\mathfrak{B}$ — сигма-алгебра борелевских множеств пространства Ω; g^t — измеримый поток на Ω, μ — вероятностная борелевская мера, инвариантная относительно g^t.

По заданой метрической динамической системе $(\Sigma,\mathfrak{A},\nu,h^t)$ и включению (0.2) построим метрическую динамическую систему, служащую расширением исходной динамической системы. С этой целью будем предполагать, что выполнено следующее условие.

[7]Это следствие аналогично теореме 1 работы [5] (см. также [6]), в которой роль $\mathbb{A}(t,\omega_0)$ выполняет множество $M(h^t\sigma)$, заданное непрерывной функцией $M(\sigma)$, определённой на Σ и принимающей значения в $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$.

[8]В другой терминологии это свойство называется *положительной инвариантностью* (при каждом σ) множества $\mathfrak{M}(\sigma)$ относительно решений включения (0.2).

Условие 2. Найдется непрерывная функция $M : \Sigma \to \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ такая, что замнутое подмножество

$$\Omega_0 = \{(\sigma, X)\colon \sigma \in \Sigma,\ X \subseteq M(\sigma)\} \tag{1.5}$$

множества Ω *положительно инвариантно*[9] относительно потока g^t.

Это условие позволяет нам рассматривать топологическую динамическую систему (Ω_0, g^t), являющуюся расширением топологической динамической системы (Σ, h^t). Построим теперь метрическую динамическую систему $(\Omega_0, \mathfrak{B}, \mu, g^t)$ по системе $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ и включению (0.2). Построим наименьшую сигма-алгебру $\mathfrak{B}$ множеств вида

$$\Sigma_0 \times M \doteq \big\{(\sigma, X) \in \Omega_0 : \sigma \in \Sigma_0,\ X \subseteq M(\sigma))\big\}.$$

Пусть λ_σ — инвариантная вероятностная мера на наименьшей сигма-алгебре $\mathfrak{R}_\sigma$ борелевских множеств, порожденной системой множеств из $\operatorname{comp}(M(\sigma))$ при каждом фиксированном σ. Определим меру μ на $\mathfrak{B}$ равенством $\mu(\Sigma_0 \times M) \doteq \int\limits_{\Sigma_0 \times M} d\nu\, d\lambda_\sigma$ для любых $\Sigma_0 \times M \in \mathfrak{B}$. Аналогично [7, с. 190] можно показать, что мера μ инвариантна относительно потока g^t; заметим также, что μ является вероятностной мерой на $\mathfrak{B}$, согласованной с мерой ν, то есть $\mu(\Sigma_0 \times \mathbb{R}^n) = \nu(\Sigma_0)$ для всех $\Sigma_0 \in \mathfrak{A}$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* 2 *и система* $(\Omega_0, \mathfrak{B}, \mu, g^t)$ *построена по системе* $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ *и включению* (0.2). *Если*

$$\nu\big(\sigma \in \Sigma\colon \varkappa(\sigma) < 1\big) = 0, \quad \text{\textit{то}} \quad \mu\big(\omega \in \Omega_0\colon \operatorname{freq}(\omega) < 1\big) = 0.$$

§ 2. Неблуждающее множество достижимости и минимальный центр притяжения

Напомним [1, гл. 5, § 5], что точка $\sigma \in \Sigma$ называется *неблуждающей* (nonwandering point), если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\vartheta > 0$ найдутся такой момент времени $t \geqslant \vartheta$ и такая точка σ_0, что $\rho_\Sigma(\sigma_0, \sigma) \leqslant \varepsilon$ и $\rho_\Sigma(h^t\sigma_0, \sigma) \leqslant \varepsilon$. Так как Σ компактно, то множество Σ_{nw} неблуждающих точек непусто, компактно и инвариантно относительно потока h^t.

Определение 2. Пусть $\omega = (\sigma, X) \in \Sigma_{nw} \times \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$. Множество достижимости $A(t, \omega)$ системы (0.1) называется *неблуждающим*, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\vartheta > 0$ найдутся точка $\omega_0 = (\sigma_0, X_0)$, удовлетворяющая условиям $\rho_\Sigma(\sigma_0, \sigma) \leqslant \varepsilon$, $\operatorname{dist}(X_0, X) \leqslant \varepsilon$ и момент времени $t \geqslant \vartheta$ такие, что $\operatorname{dist}(A(t, \omega_0), X) \leqslant \varepsilon$. Будем говорить также, что точка ω является *неблуждающей* и совокупность всех неблуждающих точек обозначим Ω_{nw}.

[9] Множество Ω_0 положительно инвариантно, если $g^t\omega \in \Omega_0$ для всех $\omega \in \Omega_0$ и $t \geqslant 0$; это эквивалентно включению $A(t, \omega) \subseteq M(h^t\sigma)$, $\omega \in \Omega_0$, $t \geqslant 0$. Условия положительной инвариантности см. [5, 6].

Теорема 3. *Если выполнено условие 2, то множество Ω_{nw} неблуждающих точек, содержащихся в Ω_0, непусто. Оно компактно и инвариантно относительно потока g^t. Следовательно, для каждого $\sigma \in \Sigma_{nw}$ найдется компактное подмножество $\mathfrak{X}_{nw}(\sigma)$ в $\operatorname{comp}\big(M(\sigma)\big)$ такое, что всякому $X \in \mathfrak{X}_{nw}(\sigma)$ отвечает неблуждающее множество достижимости $A(t,\sigma,X)$ системы* (0.1).

Обозначим $\varrho(\sigma,\Sigma_{nw}) = \min\limits_{\sigma_0\in\Sigma_{nw}} \rho_{\Sigma}(\sigma,\sigma_0)$, $\varrho(X,\mathfrak{X}_{nw}) = \min\limits_{X_0\in\mathfrak{X}_{nw}} \operatorname{dist}(X,X_0)$, $\varrho(\omega,\Omega_{nw}) = \max\big\{\varrho(\sigma,\Sigma_{nw}),\, \varrho(X,\mathfrak{X}_{nw})\big\}$, $\quad \Omega^{\varepsilon}_{nw} = \big\{\omega\in\Omega\colon\ \varrho(\omega,\Omega_{nw}) \leqslant \varepsilon\big\}$.

Теорема 4. *Предположим, что выполнено условие 2 и Ω_{nw} — множество всех неблуждающих точек пространства Ω_0. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и всякой точки ω пространства Ω_0 относительная частота пребывания движения $t \to g^t\omega$ в множестве $\Omega^{\varepsilon}_{nw}$ равна единице:*

$$\operatorname{freq}(\omega,\Omega^{\varepsilon}_{nw}) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{1}{\vartheta}\int_0^{\vartheta} \chi_{\Omega^{\varepsilon}_{nw}}(g^t\omega)\,dt = 1,$$

где χ_{E} — характеристическая функция множества E. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ и всякой точки $\omega_0 = (\sigma_0, X_0) \in \Omega_0$ найдется такая неблуждающая точка $\omega = (\sigma, X)$, что

$$\lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta] : \operatorname{dist}\big(A(t,\omega_0), A(t,\omega)\big) \leqslant \varepsilon\}}{\vartheta} = 1.$$

Инвариантное замкнутое множество Ω_c называется *центром притяжения* (attraction center) движения $g^t\omega$ при $t \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ относительная частота пребывания точки ω в Ω^{ε}_c равна единице: $\operatorname{freq}(\omega,\Omega^{\varepsilon}_c) = 1$. Если множество Ω_c не содержит собственного подмножества, также являющегося центром притяжения, то Ω_c называется *минимальным центром притяжения* (minimal attraction center) движения $t \to g^t\omega$ и обозначается $\Omega_{mc}(\omega)$ (см. [1, гл. 6, § 6]).

Теорема 5. *Если выполнено условие 2, то для каждого $\omega \in \Omega_0$ существует минимальный центр притяжения $\Omega_{mc}(\omega)$ движения $t \to g^t\omega$.*

§ 3. Рекуррентность множества достижимости и существование рекуррентных процессов системы (0.1)

Для произвольной топологической динамической системы (Σ, h^t) траекторию точки $\sigma \in \Sigma$ обозначим $\operatorname{orb}(\sigma) \doteq \{h^t\sigma : t \in \mathbb{R}\}$, а замыкание траектории — $\overline{\operatorname{orb}}(\sigma)$. Напомним, что в силу компактности Σ каждой точке $\sigma \in \Sigma$ отвечает *омега-предельное множество* $\Sigma_0(\sigma)$, то есть множество всех частичных пределов (в метрике ρ_{Σ}) движения $t \to h^t\sigma$ при $t \to \infty$. Множество $\Sigma_0(\sigma)$ непусто, компактно, связно и инвариантно.

Теорема 6. *Если выполнено условие 2, то для любого* $\sigma_0 \in \bigcup\limits_{\sigma\in\Sigma} \Sigma_0(\sigma)$ *найдется такое множество* $X_0 \subset M(\sigma_0)$, *что множество достижимости* $A(t, \omega_0)$ *системы* (0.1) *определено при всех* $t \in \mathbb{R}$, $\omega_0 = (\sigma_0, X_0)$.

Движение $t \to h^t\sigma$ называется *рекуррентным* по Биркгофу, если для любых $\varepsilon, \vartheta > 0$ множество $\Delta(\varepsilon, \vartheta) \doteq \bigl\{\tau \in \mathbb{R} : \max\limits_{|t|\leqslant\vartheta} \rho_{\Sigma}(h^{t+\tau}\sigma, h^t\sigma) \leqslant \varepsilon\bigr\}$ относительно плотно[10] на $\mathbb{R}$. Если множество $\Sigma_0 \subset \Sigma$ *минимально* (то есть замкнуто, инвариантно и не содержит истинного инвариантного подмножества), то любое движение в Σ_0 рекуррентно [1, гл. 5, § 6].

О п р е д е л е н и е 3. Множество достижимости $A(t, \omega)$ системы (0.1) называется *рекуррентным*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$ множество $\bigl\{\tau \in \mathbb{R}\colon \max\limits_{|t|\leqslant\vartheta} \operatorname{dist}\bigl(A(t+\tau, \omega), A(t, \omega)\bigr) \leqslant \varepsilon\bigr\}$ относительно плотно на $\mathbb{R}$.

Теорема 7. *Пусть выполнено условие* 2 *и множество* Σ *минимально. Тогда всякой точке* $\sigma_0 \in \Sigma$ *отвечает множество* $X_0 \subset M(\sigma_0)$ *такое, что множество достижимости* $A(t, \omega_0)$ *рекуррентно.*

В общем случае из рекуррентности $A(t, \omega)$ не следует существование рекуррентного сечения, между тем справедливо следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть выполнено условие* 2 *и множество* Σ *минимально. Тогда каждому* $\sigma_0 \in \Sigma$ *отвечает такое* $\sigma \in \Sigma$, *что включение* (0.2) *имеет хотя бы одно рекуррентное решение* $x(t, \sigma) \in M(h^t\sigma)$, $t \in \mathbb{R}$.

§ 4. Эргодические системы

Рассмотрим метрическую динамическую систему $(\Omega_0, \mathfrak{B}, \mu, g^t)$, построенную в первом параграфе по системе $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, включению (0.2) и множеству (1.5). При этом мы предполагаем, что выполнено условие 2.

Динамическая система $(\Omega_0, \mathfrak{B}, \mu, g^t)$ называется *эргодической* по отношению к мере μ (см. [1, с. 522]), если пространство Ω_0 нельзя представить как сумму двух измеримых инвариантных множеств положительной меры без общих точек, или иначе: если $A \subset \Omega_0$ инвариантно, измеримо и $\mu(A) > 0$, то $\mu(\Omega_0 \setminus A) = 0$. Таким образом, если система $(\Omega_0, \mathfrak{B}, \mu, g^t)$ эргодическая, то мера всякого инвариантного измеримого множества из Ω_0 равна нулю или единице. Система $(\Omega_0, \mathfrak{B}, \mu, g^t)$ называется *строго эргодической*, если эргодическая мера на Ω_0 единственна. В силу теоремы

[10] Δ относительно плотно на $\mathbb{R}$, если $\Delta \bigcap [t, t+\vartheta] \neq \varnothing$ для некоторого ϑ и всех t.

А. А. Маркова, примером строго эргодической динамической системы может служить система, в которой множество Ω_0 минимально относительно потока g^t и состоит из почти периодических движений [1, с. 531].

Условие 3. Найдется такая непрерывная функция M из Σ в $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, что множество Ω_0, определенное равенством (1.5), инвариантно относительно потока g^t, а функция $\mathbb{A}$, заданная условиями (1.1), *стационарна*[11] *относительно потока* g^t и для всех $\omega \in \Omega_0$ и $t \geqslant 0$ справедливо вложение $\mathbb{A}(g^t\omega) \subseteq M(h^t\sigma)$.

При условии 3 относительная частота поглощения множества достижимости $A(t,\omega)$ системы (0.1) множеством $\mathbb{A}(g^t\omega_0)$, где $\omega_0 = \big(\sigma, X_0(\sigma)\big) \subseteq \Omega_0$ и $X_0(\sigma)$ задано, запишется в виде (см. (1.2))

$$\operatorname{freq}(\omega) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : A(t,\omega) \subseteq \mathbb{A}(g^t\omega_0)\}}{\vartheta}, \quad \omega \in \Omega_0. \tag{4.1}$$

Далее, в предположениях этого параграфа в качестве функции V достаточно рассматривать функцию $(\sigma,x) \to V(\sigma,x)$, определенную на Ω_0 и не зависящую от времени t. Как и в § 1, для фиксированного компакта $X_0(\sigma) \subseteq M(\sigma)$ функцию $V(\sigma,x)$ будем называть функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M} \doteq \big\{(\sigma,x) : \sigma \in \Sigma,\ x \in \mathbb{A}(\omega_0)\big\}$, если $V(\sigma,x) \leqslant 0$ при всех $(\sigma,x) \in \mathfrak{M}$ и $V(\sigma,x) > 0$ при $(\sigma,x) \in \Omega_0 \setminus \mathfrak{M}$.

Производная V по направлению $(1,q)$ определяется равенством (1.3)

$$V^o(\sigma,x;q) \doteq \limsup_{(\tau,y,\varepsilon)\to(0,x,+0)} \frac{V(h^{\tau+\varepsilon}\sigma, y+\varepsilon q) - V(h^\tau\sigma, y)}{\varepsilon},$$

а производная V в силу (0.2) — равенством $V^o_F(\sigma,x) \doteq \max\limits_{q\in F(\sigma,x)} V^o(\sigma,x;q)$.

Теорема 9. *Пусть выполнено условие* 3 *и система* $(\Omega_0, \mathfrak{B}, \mu, g^t)$, *построенная по системе* $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ *и включению* (0.2), *эргодическая. Пусть, далее, существуют функция Ляпунова* $V\colon \Omega_0 \to \mathbb{R}$ *и непрерывная функция* $w : \Sigma\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *такие, что* $V^o_F(\sigma,x) \leqslant w\big(\sigma, V(\sigma,x)\big)$ *для почти всех* $\sigma \in \Sigma$. *Если неравенство*

$$\lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta} > 0,$$

где $z(t,\sigma)$ — *верхнее вправо решение задачи* $\dot z = w(h^t\sigma, z)$, $z(0) = 0$, *выполнено для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ (*в смысле меры* ν), *то относительная частота поглощения* $\operatorname{freq}(\omega)$, *определенная равенством* (4.1), *равна единице для почти всех* $\omega \in \Omega_0$ (*в смысле меры* μ).

[11] Функция $\mathbb{A}$ переменных (t,ω) стационарна относительно потока g^t, если она представима в виде $(t,\omega) \to \mathbb{A}(g^t\omega)$, то есть задается функцией $\mathbb{A}(\omega)$ одной переменной ω.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ. 1949. 550 с.
2. Аносов Д. В., Арансон С. Х., Бронштейн И. У., Гринес В. З. Динамические системы–1 // Итоги науки и техники. Сер. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». Т. 1. М.: Изд-во ВИНИТИ АН СССР. 1985. 244 с.
3. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука. 1977. 623 с.
4. Иванов А. Г., Тонков Е. Л. Почти периодические управляемые процессы // Вестн. Тамб. ун-та. 2007. Т. 12, вып. 4. С. 456–459.
5. Панасенко Е. А., Тонков Е. Л. Устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений и функции Ляпунова // Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 2008. Т. 262.
6. Панасенко Е. А., Тонков Е. Л. Функции Ляпунова и положительно инвариантные множества дифференциальных включений // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 6. С. 859–860.
7. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука. 1980. 384 с.

Поступила в редакцию 25. 02. 08

E. A. Panasenko, L. I. Rodina, E. L. Tonkov

Absorption, nonwandering, and reccurence of the attainable set of a controllable system

The conditions are studied under which the attainable set of a controllable system can be absorbed in the given set or becomes nonwandering, recurrent, ergodic.

Панасенко Елена Александровна
Тамбовский государственный
университет
392000, Россия, г. Тамбов,
ул. Интернациональная, 33.
E-mail: panlena_t@mail.ru

Тонков Евгений Леонидович
Удмуртский государственный
университет
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1(корп. 4).
E-mail: eltonkov@udm.ru

Родина Людмила Ивановна
Удмуртский государственный
университет
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1(корп. 4).
E-mail: rdl@uni.udm.ru