ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.934

© ***А. Я. Нарманов, А. С. Шарипов***

О НЕКОТОРЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ ТЕОРИИ СЛОЕНИЙ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

Обсуждается возможность применения теории слоений в теории управления.

Ключевые слова: слоение, система управления, множество управляемости, функция Беллмана.

Рассматривается система управления

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x \in M, \quad u \in U \subset R^m, \tag{1}$$

где M — гладкое (класса C^∞) связное многообразие размерности n с некоторой римановой метрикой g, U — компакт, для каждого элемента $u \in U$ векторное поле $f(\cdot,u)$ является полем класса C^∞, а отображение $f : M \times U \to TM$ непрерывно, где TM — касательное расслоение многообразия M.

Допустимыми управлениями считаются кусочно-постоянные функции $u : [0,T] \to U$, где $0 < T < \infty$. Таким образом, траектории системы (1), соответствующие допустимым управлениям, представляют собой кусочно-гладкие отображения $x : [0,T] \to M$. Цель управления — приведение системы в некоторое фиксированное (целевое) состояние $\eta \in M$. Будем говорить, что точка $x_0 \in M$ управляема из точки η за время $T > 0$, если существует такая траектория $x : [0,T] \to M$ системы (1), что $x(0) = x_0$, $x(T) = \eta$.

Обозначим через $G_\eta(< T)$ множество точек M, которые управляемы из точки η за время, меньшее T. Считаем, что $\eta \in G_\eta(< T)$ для каждого $T > 0$. Множество всех точек M, управляемых из точки η, называется множеством управляемости с целевой точкой η и обозначается через G_η.

Известно, что множество всех гладких (класса C^∞) векторных полей на M является алгеброй Ли, в которой произведением векторных полей X и Y служит их скобка Ли $[X,Y]$. Обозначим через D множество векторных полей $\{f(\cdot,u) : u \in U\}$, через $A(D)$ — минимальную подалгебру Ли, содержащую D.

Орбита $L(x)$ множества D, содержащая точку $x \in M$, определяется как множество всех точек y из M вида

$$y = X_l^{t_l}\Big(X_{l-1}^{t_{l-1}}\big(\ldots\big(X_l^{t_1}(x)\big)\ldots\big)\Big),$$

где t_i — действительные числа, $i = 1, 2, \dots, l$, $t \to X^t(x)$ — интегральная кривая векторного поля X, проходящая через точку x при $t = 0$.

Область определения $\Omega(x, X)$ отображения $t \to X^t(x)$ зависит от x и X. В дальнейшем всюду в записях вида $X^t(x)$ будем считать, что $t \in \Omega(x, X)$, где $x \in M$, $X \in D$.

Из определения орбиты вытекает, что $G_\eta \subset L(\eta)$ для всех $\eta \in M$. Известно, что каждая орбита D является погруженным подмногообразием многообразия M и разбиение многообразия M на орбиты D представляет собой гладкое (класса C^∞) слоение с особенностями [1]. Это слоение обозначим через F. Таким образом, орбиты D являются слоями слоения F.

Предположим, что $\dim A_x(D) = k$ для всех $x \in M$, где $0 < k < n$, $A_x(D) = \{X(x) : X \in A(D)\}$. В этом случае F является k-мерным слоением, то есть все его слои (орбиты) k-мерные многообразия [1]. В этом случае возникают широкие возможности применения методов теории слоений в задачах управления. Мы здесь отметим две задачи управления, в решении которых важную роль играют методы теории слоений.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что система (1) вполне управляема на $L(\eta_0)$, если $G_\eta = L(\eta_0)$ для всех $\eta \in L(\eta_0)$.

Рассмотрим следующий вопрос: если система (1) обладает свойством вполне управляемости на одном фиксированном слое слоения F, то при каких условиях система (1) обладает этим свойством на близких к данному слою слоях?

Этот вопрос тесно связан с задачами качественной теории слоений о локальной стабильности слоя в смысле Дж. Риба [2]. В работе [3] дан ответ на этот вопрос в случае, когда слой L_0 слоения F, в окрестности которого изучается система (1), является компактом. При этом требуется выполнение условий теоремы Дж. Риба о локальной стабильности. А именно, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть L_0 — компактный слой слоения F с конечной группой голономии. Тогда если система (1) вполне управляема на L_0, то она вполне управляема на слоях, достаточно близких к L_0.*

В работе [4] доказано следующее обобщение теоремы Дж. Риба.

Теорема 2. *Пусть F — трансверсально ориентируемое слоение коразмерности один, L_0 — относительно компактный собственный слой с конечнопорожденной фундаментальной группой. Тогда если группа голономии слоя L_0 тривиальна, то для каждого $r > 0$ существует инвариантное множество V такое, что $L_0 \subset V \subset U_r$, и сужение F на V является расслоением над $\mathbb{R}^1$ со слоем L_0.*

В работе [5] с использованием обобщения теоремы Риба, доказанным А. Я Нармановым, получен следующий результат.

Теорема 3. *Пусть слой $L(x_0)$ является вложенным подмногообразием M и имеет тривиальную группу голономии. Тогда если отображение $x \to L(x)$ непрерывно в точке x_0, то система (1) вполне управляема на орбитах, достаточно близких к $L(x_0)$.*

Теперь рассмотрим вопрос о непрерывности функции Беллмана для задачи быстродействия. Напомним, что функция Беллмана для задачи быстродействия $T_\eta(x) : G_\eta \to R^1$ определяется следующим образом: $T_\eta(\eta) = 0$ и

$$T_\eta(x) = \inf\{\tau > 0 : \text{ существует траектория } \alpha(t) : [0, \tau] \to M \text{ системы (1),} \\ \text{что } \alpha(0) = x,\ \alpha(\tau) = \eta\}, \text{ если } \quad x \in G_\eta \backslash \{\eta\}.$$

Определение 2. Слой (орбита) L называется собственным, если каноническая инъекция $i : L \to M$ является вложением, то есть когда топология слоя совпадает с индуцированной топологией из M.

Следующая теорема показывает, что для непрерывности функции Беллмана необходимо, чтобы слой был собственным [6].

Теорема 4. *Если множество G_η является несобственным слоем, то функция Беллмана терпит разрыв в каждой точке G_η.*

Теорема 5. *Пусть $\dim A_x(D) \equiv const$ для всех $x \in G_\eta$. Тогда для того чтобы функция Беллмана была непрерывной на G_η, необходимо и достаточно, чтобы множество G_η было собственным слоем.*

Следующие теоремы, доказанные авторами, дают достаточные условия того, чтобы орбита была собственным слоем слоения F.

Теорема 6. 1. *Орбита L_0 является собственным слоем тогда и только тогда, когда $L_0 \cap \Omega(L_0) = \emptyset$.*

2. *Орбита L_0 является несобственным слоем тогда и только тогда, когда $\Omega(L_0) = \overline{L_0}$, где $\overline{L_0}$ — замыкание орбиты L_0 в M.*

Теорема 7. *Если слой L является замкнутым подмножеством M, то он является собственным.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sussman H. J. Orbits of families of vector fields and integrability of distributions // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 180. P. 171–183.
2. Тамура И. Топология слоений. М.:Мир, 1979.
3. Gauthier J., Bornard G. An openness condition for the controllability of nonlinear systems // SIAM J. Control Optim. 1982. V. 20, № 6. P. 808–814.
4. Нарманов А. Я. // Математические труды. Ташкент, 2001. Т. 4, № 1. С. 94–110.

5. Азамов А., Нарманов А. Я. О предельных множествах орбит систем векторных полей // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 2. С. 257–260.

6. Реттиев Н. С. О непрерывности и разрывности функции Беллмана // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 12. С. 2178–2184.

Поступила в редакцию 15.02.08

A. Y. Narmanov, A. S. Sharipov
About some applications of foliation theory in control problems

The possibility of applying the foliation theory in the control theory is considered

Нарманов Абдигаппар Якубович
Национальный ун-т Узбекистана,
100174, Узбекистан, г. Ташкент,
Вузгородок
E-mail: narmanov@yandex.ru

Шарипов Анваржон Солиевич
Национальный ун-т Узбекистана
100174, Узбекистан, г. Ташкент,
Вузгородок
E-mail: asharipov@inbox.ru