ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.929

© *В. В. Малыгина, А. Ю. Куликов*

НЕКОТОРЫЕ ПРИЗНАКИ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предложен метод сведения неавтономных разностных уравнений к функционально-дифференциальным, на основе которого получены новые признаки устойчивости разностных уравнений.

Ключевые слова: неавтономные разностные уравнения, устойчивость.

Рассмотрим разностное уравнение

$$x(n+1)-x(n)=-a(n)x(n-h(n)),\quad n\in\mathbb{N}_0. \tag{1}$$

Не нарушая общности, можно считать, что при отрицательных значениях аргумента x полагается равным нулю, а $x(0)=1$.

Введем вспомогательные функции непрерывного аргумента p и r по правилу $p(t)=a([t])$, $r(t)=h([t])+t-[t]$, где $[t]$ означает целую часть числа $t\in\mathbb{R}_+$. Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение с сосредоточенным запаздыванием

$$y'(t)=-p(t)y(t-r(t)),\quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{2}$$

в котором при отрицательных значениях аргумента также полагаем y равным нулю, а $y(0)=1$. Легко доказать, что между решениями уравнений (1) и (2) существует простая зависимость: $x(n)=y(n)$ при любых $n\in\mathbb{N}_0$. Теперь для исследования устойчивости решения уравнения (1) можно использовать любые известные признаки устойчивости для уравнения (2) (см., например, [1, гл. 3]).

Теорема 1. *Пусть* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a(n)|<\infty$. *Тогда любое решение уравнения* (1) *имеет на бесконечности конечный предел.*

Теорема 2. *Пусть* $a(n)\geqslant 0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a(n)=\infty$ *и* $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{n-h(n)}^{n}a(i)<3/2$. *Тогда уравнение* (1) *асимптотически устойчиво.*

Теорема 3. *Пусть* $a(n) \geqslant 0$ *и* $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \sum\limits_{i=n-h(n)}^{n} a(i) \leqslant 3/2$. *Тогда уравнение* (1) *равномерно устойчиво.*

Построены примеры, демонстрирующие существенность условий теорем 2 и 3. Оказалось, что в теореме 2 нельзя заменить строгое неравенство нестрогим, в теореме 3 нельзя увеличить 3/2 на любую, сколь угодно малую величину и более того, в теореме 3 нельзя даже заменить точную верхнюю грань верхним пределом.

Постоянную 3/2 удается увеличить до $\pi/2$, если предположить, что последовательность $\sum\limits_{i=n-h(n)}^{n} a(i)$ имеет предел на бесконечности.

Теорема 4. *Пусть* $a(n) \geqslant 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a(n) = 0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a(n) = \infty$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{n-h(n)}^{n} a(i) < \pi/2$. *Тогда уравнение* (1) *асимптотически устойчиво.*

Постоянная $\pi/2$ в теореме 4 также является точной.

Как показано в работе [2], теоремы 1–3 легко обобщаются на разностные уравнения с любым количеством слагаемых.

* * *

1. Азбелев Н. В., Симонов П. М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь, Изд-во Пермского ун-та, 2001.
2. Куликов А. Ю., Малыгина В. В. Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Известия вузов. Математика. 2008. (В печати).

Поступила в редакцию 15.02.08

V. V. Malygina, A. Yu. Kulikov
Some conditions for stability of difference equations

The method for reduction of nonautonomous difference equations to the functional differential ones is suggested. Some new conditions for stability of difference equations are obtained.

Малыгина Вера Владимировна
Пермский государственный
технический университет
206001, Россия, г. Пермь,
Комсомольский пр., 29а
E-mail: mavera@list.ru

Куликов Андрей Юрьевич
Пермский государственный
технический университет
206001, Россия, г. Пермь,
Комсомольский пр., 29а
E-mail: stipan@mail.ru