ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.929

© *В. П. Максимов, П. М. Симонов*

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ [1]

Предлагается краткий обзор современного состояния теории функционально-дифференциальных уравнений, разработанной участниками Пермского семинара [1]. Приводятся примеры новых подходов к ряду классических задач. Изложение основных результатов следует неопубликованной обзорной статье, подготовленной Н. В. Азбелевым и авторами доклада в 2006 г.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, краевые задачи, вариационные задачи, асимптотическое поведение решений.

Введение

В монографии [2] предложена теория функционально-дифференциального уравнения
$$\dot{x} = Fx. \tag{1}$$
Оператор F здесь действует из банахова пространства AC^n абсолютно непрерывных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ в пространство L^n суммируемых $z : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Обобщение состоит в замене специфического «локального» оператора Немыцкого $(Nx)(t) = f(t, x(t))$ на общий оператор $F : AC^n \to L^n$. Теория уравнения (1) существенно опирается на изоморфизм $AC^n = L^n \times \mathbb{R}^n$, определяемый равенством $x(t) = \int_a^t z(s)ds + \alpha$, $z \in L^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Оказалось, что при замене пространства L^n на произвольное банахово пространство B сохраняются основные утверждения теории уравнения (1). Таким образом возникает дальнейшее обобщение дифференциального уравнения. Уравнение в банаховом пространстве D, изоморфном прямому произведению $B \times \mathbb{R}^n$, получило название абстрактного функционально-дифференциального уравнения(ФДУ). Наиболее подробно изучено уравнение $\mathcal{L}x = f$ с линейным ограниченным оператором

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 06–01–00744, 07–01–96060).

$\mathcal{L} : D \to B$. В центре линейной теории — «краевая задача» — система уравнений
$$\mathcal{L}x = f, \quad \ell x = \alpha, \tag{2}$$
где $\ell : D \to \mathbb{R}^m$ — линейный ограниченный вектор-функционал. Если $m = n$ и задача имеет единственное решение $x \in D$ для каждой пары $\{f, \alpha\} \in B \times \mathbb{R}^n$, то это решение представимо в виде
$$x = Gf + X\alpha. \tag{3}$$
Здесь оператор Грина $G : B \to D$ и конечномерный оператор $X : \mathbb{R}^n \to D$ (фундаментальная матрица уравнения $\mathcal{L}x = 0$) непрерывны. Теория абстрактного ФДУ не ограничивает исследователя возможностью изучать широкие классы уравнений, непосредственно опираясь на стандартные теоремы анализа, но и предлагает новые подходы к решению ряда классических и новых задач. Иллюстрируя сказанное, ограничимся следующими задачами.

§ 1. Асимптотическое поведение решений

Если элементы $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ пространства $D = B \times \mathbb{R}^n$ обладают какими-нибудь специфическими особенностями, например $\sup\limits_{t \geqslant 0} \|x(t)\| < \infty$, и для уравнения $\mathcal{L}x = f$ с линейным ограниченным оператором $\mathcal{L} : D \to B$ однозначно разрешима какая-нибудь (модельная) краевая задача (2), то и решения этой задачи будут обладать такими же асимптотическими свойствами. Это следует из приводимой ниже теоремы.

Теорема 1. *Пусть $W : B \to D$ — оператор Грина модельной краевой задачи и U — фундаментальная матрица модельного уравнения $\mathcal{L}_0 x = 0$. Пусть, далее, оператор $\mathcal{L} : D \to B$ ограничен, G — оператор Грина краевой задачи $\mathcal{L}x = f$, $\ell x = 0$ и X — фундаментальная матрица уравнения $\mathcal{L}x = 0$. Тогда равенство*
$$WB + U\mathbb{R}^n = GB + X\mathbb{R}^n \tag{4}$$
выполнено в том и только в том случае, если оператор $\mathcal{L}W$ имеет ограниченный обратный $(\mathcal{L}W)^{-1} : B \to B$.

В случае равенства (4) (совпадения пространств всех решений модельного и исследуемого уравнений) уравнение $\mathcal{L}x = f$ называется D-устойчивым. Применительно к дифференциальным уравнениям понятие D-устойчивости является естественным обобщением классических понятий устойчивости. Исследования по D-устойчивости систематизированы в монографии [4], изданной на английском языке в издательстве «Taylor and Francis».

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

§ 2. Вариационное исчисление

Общая теория ФДУ позволяет предложить новый эффективный подход к задачам вариационного исчисления, при котором удается обойти ряд трудностей, возникающих при классическом подходе.

Задача

$$J(x) = \frac{1}{2}\int_a^b \Big(\sum_{i=1}^{m}(T_{1i}x)(s)(T_{2i}x)(s) + (T_0x)(s)\Big)ds \to \min, \quad \ell x = \alpha \qquad (5)$$

о минимуме функционала J с линейными ограничениями $\ell x = \alpha$ рассматривается в банаховом пространстве D функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^1$, изоморфном прямому произведению $L_2 \times \mathbb{R}^n$, где L_2 — пространство суммируемых с квадратом функций $z : [a,b] \to \mathbb{R}^1$, снабженное стандартным скалярным произведением. Линейный вектор-функционал и линейные операторы $T_0, T_{k,i} : D \to L_2$ предполагаются ограниченными. Путем W-подстановки $x = Wz + U\alpha$ строится вспомогательный функционал $J_1(z) = J(Wz + U\alpha)$ в пространстве L_2. Точки минимума $x_0 \in D$ задачи (5) и точки минимума $z_0 \in L_2$ функционала J_1 оказываются взаимно однозначно связанными равенствами $x_0 = Wz_0 + U\alpha$, $z_0 = \mathcal{L}_0 x_0$, $\alpha = \ell x_0$. Таким образом, задача (5) об условном минимуме в пространстве D сводится к задаче о безусловном минимуме функционала J_1 в удобном для исследования пространстве L_2. Следуя методике, предложенной в [5] для решения последней задачи, определим оператор $H : L_2 \to L_2$ и функцию $f \in L_2$ равенствами

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(Q_{1i}^* Q_{2i} + Q_{2i}^* Q_{1i}), \quad f = -Q_0^*(1) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(Q_{1i}^* T_{2i} + Q_{2i}^* T_{1i})u.$$

Здесь $Q_{ki} = T_{ki}W$, $k = 1,2$, $i = 1,\dots,m$, $Q_0 = T_0 W$, $\cdot^*$ — символ сопряженного оператора, u — решение полуоднородной модельной задачи $\mathcal{L}_0 x = 0$, $\ell x = \alpha$.

В [3, 5] приводится доказательство следующего критерия.

Теорема 2. *Минимум функционала J_1 достигается в точке z_0 тогда и только тогда, когда оператор H положительно определен, а точка z_0 удовлетворяет уравнению $Hz = f$.*

§ 3. Сингулярные задачи

Неудачный выбор множества, в котором следует искать решение задачи, может вызвать серьезные осложнения, задача может быть «сингулярной» (для которой неприменимы стандартные методы) в одном пространстве и регулярной в другом. Ограничимся следующим примером [3].

Уравнение

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv t(t-1)\ddot{x}(t) + q(t)\dot{x}(t) + p(t)x(t) = f(t), \quad t \in [0,1]$$

с суммируемыми q и p может не иметь решений в традиционном для уравнений второго порядка пространстве функций $W_1^2 = L^1 \times \mathbb{R}^2$. Однако это уравнение оказывается регулярным (удовлетворяющим требованиям общей теории) в пространстве D, состоящим из таких функций $x : [0,1] \to \mathbb{R}$, что 1) x абсолютно непрерывна на [0,1]; 2) ее производная $\dot{x}$ абсолютно непрерывна на каждом отрезке $[a', b'] \subset [0,1]$, $0 < a' < b' < 1$; 3) произведение $t(t-1)\ddot{x}(t)$ суммируемо на $[0,1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев Н. В. Пермский семинар по функционально-дифференциальным уравнениям // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. 2003. Т. 9, № 2(18). Р. 90–95.
2. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1991.
3. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Ин-т компьютерн. исслед. 2002.
4. Азбелев Н. В., Симонов П. М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Перм. ун-та. 2001.
5. Azbelev N. V., Rakhmatullina L. F. Theory of linear abstract functional differential equations and applications // Mem. Different. Equat. Math. Phys. Tbilisi: Publishing House GCI. 1996. Vol. 8, P. 1-102.

Поступила в редакцию 11. 02. 08

V. P. Maksimov, P. M. Simonov

Functional differential equations and their applications

A brief survey of the theory of functional differential equations, worked out by participants of the Perm Seminar [1], is presented. The presentation follows the unpublished paper prepared by N. V. Azbelev and the authors in 2006.

Максимов Владимир Петрович
Пермский государственный
университет
614990, Россия, г. Пермь,
ул. Букирева, 15 (корп. 12)
E-mail: maksimov@econ.psu.ru

Симонов Петр Михайлович
Пермский государственный
университет
614990, Россия, г. Пермь,
ул. Букирева, 15 (корп. 12)
E-mail: simonov@econ.psu.ru