ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.977

© *В. И. Максимов*

О ПРИМЕНЕНИИ РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО ЭКСТРЕМАЛЬНОГО СДВИГА К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ И РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ[1]

Для систем, описываемых уравнениями с запаздыванием, обсуждается применение экстремального сдвига к исследованию некоторых задач динамической идентификации и робастного управления.

Ключевые слова: управление, идентификация, системы с запаздыванием.

Метод экстремального сдвига — один из эффективнейших методов исследования задач управления по принципу обратной связи — был предложен Н. Н. Красовским [1]. В дальнейшем он широко применялся в том числе и при исследовании задач игрового управления в системах с запаздыванием. Цель данной работы состоит в том, чтобы проиллюстрировать возможности этого метода при исследовании некоторых задач идентификации и робастного управления. Поясним суть метода на примере задачи отслеживания движения системой

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B(u(t) - v(t)), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовое пространство, $u, v \in \mathbb{R}^m$, $x(t_0) = x_0$, B — $n \times m$-мерная матрица, функция f липшицева по совокупности аргументов, $v(t) \in Q$ — помеха, $u(t) \in P$ — управление, $P, Q \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченные замкнутые множества. Требуется указать такой закон выбора управления $u = u(t, x)$, что траектория системы (1) близка (в равномерной метрике) к траектории системы $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$, $t \in T$, $y(t_0) = x_0$, то есть величина $I(x, y) = \sup\limits_{t \in T} |x(t; u, v) - y(t)|$ мала. Пусть $Q \subset P$ и выбрано разбиение $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_m = \vartheta$ с диаметром $\delta = (\vartheta - t_0)/m$. Полагаем,

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 07–01–00008), программы Президиума РАН «Процессы управления» и Урало-Сибирского интеграционного проекта.

что траектория $x(t)$ измеряется в моменты τ_i с ошибкой h. Результаты измерений — векторы ξ_i^h удовлетворяют неравенствам

$$|\xi_i^h - x(\tau_i)| \leqslant h. \tag{2}$$

Суть метода экстремального сдвига применительно к описанной задаче состоит в выборе управления u в следующем виде

$$u(\tau_i, \xi_i^h) = \arg\min\{(\xi_i^h - y(\tau_i), Bu) : u \in P\}.$$

Тогда, как следует из результатов [1], $\forall\,\varepsilon > 0 \ \ \exists\, h_1 > 0$ и $\delta_1 > 0$ такие, что если $h \in (0, h_1)$, $\delta \in (0, \delta_1)$, то справедливо неравенство $\sup\limits_{t\in T} |x(t; u(\cdot), v(\cdot)) - y(t)| \leqslant \varepsilon$ (для любой помехи $v(t) \in Q$). В случае когда система описывается уравнением с запаздыванием, например, вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\nu)) + B(u(t) - v(t)), \quad t \in T, \tag{3}$$

$\nu > 0$, $x(t_0 + s) = x_0(s) \in C([-\nu, 0]; \mathbb{R}^n)$, $s \in [-\nu, 0]$ метод экстремального сдвига был развит в работах Ю. С. Осипова (см., например, [2]).

Рассмотрим задачу динамической идентификации для системы (3), когда $u = 0$. Таким образом, траектория системы зависит лишь от возмущения v. Пусть в моменты времени $\tau_i \in T$ наблюдаются векторы $x(\tau_i)$. Результаты измерений — векторы $\xi_i^h \in \mathbb{R}^n$ — удовлетворяют неравенствам (2). Задача состоит в построении алгоритма приближенного восстановления $v(\cdot)$, обладающего свойствами динамичности и устойчивости. Таким образом, необходимо сконструировать алгоритм приближенного вычисления управления $v^h(\cdot)$, играющего роль своего рода оценки, приближения $v(\cdot)$. Считаем, что функция f в (3) липшицева по совокупности переменных, а функция $v(\cdot) \in L_\infty(T; \mathbb{R}^m)$. Возьмем некоторое семейство разбиений

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = t_0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h) \tag{4}$$

отрезка T с шагом $\delta(h)$ и функцию $\alpha : \mathbb{R}^+ \to (0,1)$, $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ такие, что

$$\delta(h) \to 0, \quad \alpha(h) \to 0, \quad (h + \delta(h))/\alpha(h) \to 0 \text{ при } h \to 0. \tag{5}$$

Затем введем вспомогательную управляемую систему

$$\dot{w}(t) = f(\tau_{h,i}, \xi_i^h, \xi_{i-r_i}^h) - Bv^h(t), \quad t \in \delta_{h,i} = [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1}) \tag{6}$$

с начальным условием $w(t_0) = x_0(0)$. Здесь символ $\tau_{h,i-r_i}$ означает момент «наблюдения», принадлежащий полуинтервалу $[\tau_{h,i} - \nu, \tau_{h,i} - \nu + \delta(h))$.

Для простоты будем считать, что начальное состояние системы $x_0(s)$ известно. В таком случае при $i - r_i < 0$ полагаем $\xi^h_{i-r_i} = x_0((i-r_i)\delta(h))$.

До начала работы алгоритма фиксируем величину h и разбиение Δ_h. Работу алгоритма разобьем на $m-1$ $(m = m_h)$ однотипных шагов. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_{h,i}$, выполняются следующие операции. Сначала в момент τ_i вычисляется вектор

$$v^h_i = \arg\min\{2(\xi^h_i - w(\tau_{h,i}), Bv) + \alpha|v|^2 : v \in \mathbb{R}^m\} = -\frac{1}{\alpha}B'(\xi^h_i - w(\tau_{h,i})).$$

Здесь и ниже штрих означает транспонирование. Затем на вход системы (6) при $t \in \delta_{h,i}$ подается управление $v^h(t) = v^h_i$. Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ.

Легко видеть, что при вычислении v^h_i осуществляется локальная регуляризация экстремального сдвига по методу сглаживающего функционала. Пусть $u_*(\cdot) = u_*(\cdot; x(\cdot))$ — единственный элемент множества $U(x(\cdot))$ — минимальной $L_2(T;\mathbb{R}^m)$-нормы, где $U(x(\cdot))$ — множество всех управлений $u(\cdot) \in L_2(T;\mathbb{R}^m)$, совместимых с выходом $x(\cdot)$.

Теорема 1. *Пусть матрица BB' является положительно определенной. Пусть также выполнены условия* (5). *Тогда имеет место сходимость $v^h(\cdot) \to u_*(\cdot)$ в $L_2(T;\mathbb{R}^m)$ при $h \to 0$.*

Обратимся к одной задаче робастного управления. Ее суть состоит в следующем. Полагаем, что траектория $x(t)$ измеряется в моменты τ_i с ошибкой h. Результаты измерений удовлетворяют неравенству (2). Требуется организовать процесс управления системой (3) так, чтобы ее траектория была «близка» к траектории системы $\dot y(t) = f(t, y(t), y(t-\nu))$, $y(t_0 + s) = x_0(s)$. А именно, потребуем, чтобы наряду с «малостью» величины $I(x, y)$ была «мала» также величина

$$I_1(\dot x, \dot y) = \int_{t_0}^{\vartheta} |\dot x(t; u(\cdot), v(\cdot)) - \dot y(t)|^2\, dt.$$

Будем считать, что множества P и Q отсутствуют и априори известно лишь, что $v(\cdot) \in L_\infty(T;\mathbb{R}^m)$.

Выберем функции $\delta(h)$ и $\alpha(h) : \mathbb{R}^+ \to (0,1)$ со свойствами

$$\alpha(h) \to 0, \quad \delta(h)\alpha^{-2}(h) \leqslant 1, \quad (h + \delta(h))\alpha^{-1}(h) \to 0 \text{ при } h \to 0 \qquad (7)$$

и семейство разбиений (4). Введем вспомогательную систему

$$\dot z^h(t) = f(\tau_{h,i}, \xi^h_i, \xi^h_{i-r_i}) + B(v^h(t) - \tilde v^h(t)), \quad t \in \delta_{h,i}, \qquad (8)$$

$$i \in [0 : m_h - 1], \quad z^h(t_0) = x_0(0).$$

Здесь $v^h(t)$ и $\tilde{v}^h(t)$ — управления, подлежащие формированию.

До начала работы алгоритма фиксируем величину h и разбиение Δ_h. Работа алгоритма разбивается на $m_h - 1$ однотипных шагов. На i-м шаге ($i = 0, \ldots, m_h - 1$), осуществляемом на временном отрезке $\delta_{h,i}$, выполняются следующие действия. Сначала задается функция

$$w_i^h(t) = \arg\min\{2(z^h(\tau_{h,i}) - \xi_i^h, Bv) + \alpha|v|^2 : v \in \mathbb{R}^m\} =$$
$$= -\frac{1}{\alpha}B'(z^h(\tau_{h,i}) - \xi_i^h), \quad t \in \delta_{h,i}.$$

Затем в течение промежутка $\delta_{h,i}$ на вход системы (8) подаются управления $v^h(t) = w_i^h(t)$, $\tilde{v}^h(t) = w_{i-1}^h(t - \delta)$, а на вход реальной системы (системы (3)) — управление $u(t) = u^h(t) = w_{i-1}^h(t - \delta)$. При $i = 0$ полагаем $w_{-1}^h(t) = 0$. Работа алгоритма заканчивается в момент времени ϑ.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (7). *Тогда при* $h \to 0$

$$x^h(\cdot) \to y(\cdot) \quad \text{в} \quad C(T; \mathbb{R}^n), \quad \dot{x}^h(\cdot) \to \dot{y}(\cdot) \quad \text{в} \quad L_2(T; \mathbb{R}^n).$$

Здесь символ $x^h(\cdot)$ означает траекторию системы (3), порожденную неизвестным возмущением $v(\cdot)$ и управлением $u^h(\cdot)$.

* * *

1. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
2. Осипов Ю. С. Дифференциальные игры систем с последействием // ДАН СССР. 1971. Т. 196, № 4.

Поступила в редакцию 13. 02. 08

V. I. Maksimov

On the application of regularized extremal shift to the investigation of some problems of dynamical identification and robust control for systems with delay

The application of extremal shift to the investigation of some problems of dynamical identification and robust control is discussed for systems described by equations with delay .

Максимов Вячеслав Иванович
Институт математики и механики УрО РАН
620219, Россия, г. Екатеринбург,
ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: maksimov@imm.uran.ru