ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.977

© *С. В. Лутманов*

ОБ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ НЕСКОЛЬКИХ ЛИЦ В КЛАССЕ ПОЗИЦИОННЫХ СТРАТЕГИЙ

Вводится новое понятие решения в дифференциальных играх со многими участниками.

Ключевые слова: дифференциальная игра, позиционные стратегии.

Рассматривается дифференциальная игра, описываемая системой вида

$$\dot{x} = A(t)x + \sum_{i=1}^{k} u_i,\ u_i \in P_i,$$

где $x \in R^n$, P_i — выпуклые компакты R^n, $i \in K = \{1, \dots, k\}$. Момент T окончания игры фиксирован, а функция платы i-го игрока имеет вид

$$I_i\big[U_1, \dots U_k\big] = \varphi_i(x(T)),$$

где функции φ_i являются достаточно гладкими. В качестве принципа рационального поведения игроков в игре предлагается принцип компромисса. Смысл его состоит в том, что для заданных значений компромиссных оценок строится набор стратегий всех игроков, который обеспечивает результат игры для каждого игрока не «хуже» его верхней компромиссной оценки, а любому «игроку-уклонисту» не позволяет получить значение платы «лучше» его нижней компромиссной оценки.

Для игры в нормальной форме $\Gamma = \Big\{K, \{U_i\}_{i\in K}, \{I_i\}_{i\in K}\Big\}$ введем понятие компромиссного набора стратегий всех игроков.

Определение 1. Пусть $S_* = (S_{1*}, \dots, S_{k*})$, $S^* = (S_1^*, \dots, S_k^*)$, $S_{i*} \leqslant S_i^*$, $i \in K$. Ситуация $W^c = (U_1^c, \dots, U_k^c)$ называется компромиссной относительно векторов S_*, S^*, если для всех $i \in K$ выполняются неравенства

$$S_{i*} \leqslant \min_{U_i} I_i(U_1^c, \dots, U_i, \dots U_k^c) \leqslant I_i(U_1^c, \dots, U_i^c, \dots U_k^c) \leqslant S_i^*.$$

В предположении, что для любого вектора $s \in R^n$ и всех номеров $i \in K$ выполнено неравенство

$$\min_{u_1 \in P_1}(s, u_1) + \dots + \min_{u_i \in P_i}(s, u_i) + \dots + \min_{u_k \in P_k}(s, u_k) \leqslant 0,$$

построим компромиссный набор стратегий всех игроков в рассматриваемой линейной дифференциальной игре нескольких лиц.

Пусть M — выпуклое и компактное множество. Полагаем

$$S_i = \max_{x \in M} \varphi_i(x),\ s_i = \min_{x \in M} \varphi_i(x),\ i \in K, \tag{1}$$

$$\varepsilon(t,x) = \max\bigl\{0, \max_{|l|=1}\bigl[-\max_{p \in M}(p,l) + (X(T,t)x,l)\bigr]\bigr\}, \tag{2}$$

$$W = \{(t,x) : \varepsilon(t,x) \leqslant 0,\ t \leqslant T\},\ W_\varepsilon = \{(t,x) : \varepsilon(t,x) > 0,\ t \leqslant T\},$$

где $X(T,t)$ — матрица Коши системы $\dot{x} = A(t)x$.

Лемма 1. *Для всех* $(t,x) \in W_\varepsilon$ *максимум в* (2) *достигается на единственном векторе* $l^0(t,x)$.

Лемма 2. *Функция* ε *является непрерывно дифференцируемой функцией в области* W_ε, *и ее частные производные вычисляются по формулам*

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}(t,x) = X^T(T,t)l^0(t,x) = s(t,x),\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}(t,x) = -(X^T(T,t)A(t)x, l^0(t,x)).$$

Набор стратегий $U_1^c, \ldots, U_k^c$ определим соотношением

$$U_i^c(t,x) = \begin{cases} u_i^e(t,x), & (t,x) \in W_\varepsilon; \\ u_i \in P_i, & (t,x) \notin W_\varepsilon, \end{cases} \tag{3}$$

где u_i — произвольный вектор P_i, а $u_i^e(t,x)$ удовлетворяет условию

$$(s(t,x), A(t)u_i^e(t,x)) = \max_{u_i \in P_i}(s(t,x), A(t)u_i),\ i \in K,\ (t,x) \in W_\varepsilon.$$

Теорема 1. *Набор стратегий* (3) *является компромиссным относительно оценок* (1) *для любой начальной позиции из множества* W.

Поступила в редакцию 15.02.08

S. V. Lutmanov

About one differential game with many participants in a class of positional strategies

A new concept of solution of differential games with many participants is introduced.

Лутманов Сергей Викторович
Пермский государственный университет
614990, Россия, Пермь,
ул. Букирева, 15
E-mail: mpu@psu.ru