ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.977

© *Н. Ю. Лукоянов*

СТАБИЛЬНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ С НАСЛЕДСТВЕННОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ [1]

Для задач управления наследственными динамическими системами изучаются условия, определяющие u-стабильные функционалы от истории движения.

Ключевые слова: наследственные динамические системы, управление по принципу обратной связи с памятью, дифференциальные игры систем с последействием, стабильные функционалы.

Согласно теоретико-игровому подходу [1–4] одним из центральных элементов при построении стратегий эффективного управления наследственными динамическими системами в условиях помех или конфликта является понятие u- и v-стабильных функционалов от истории движения. Ниже приводятся различные по форме, но эквивалентные по существу критерии u-стабильности таких функционалов.

Рассмотрим задачу управления, описываемую уравнением движения

$$\dot{y}(\tau) = f\big(\tau, y(\cdot), u(\tau), v(\tau)\big),\ t \leqslant \tau \leqslant T,\ y(\tau) \in \mathbb{R}^n,\ u(\tau) \in \mathbb{P},\ v(\tau) \in \mathbb{Q}, \quad (1)$$

начальным условием

$$y(\tau) = x(\tau) \text{ при } t_* \leqslant \tau \leqslant t, \quad t \in [t_0, T),\ x(\cdot) \in C \quad (2)$$

и показателем качества

$$\gamma = \sigma\big(y(\cdot)\big) - \int_t^T h\big(\tau, y(\cdot), u(\tau), v(\tau)\big)\mathrm{d}\tau. \quad (3)$$

Здесь τ — текущее время, $y(\tau)$ и $\dot{y}(\tau) = \mathrm{d}y(\tau)/\mathrm{d}\tau$ — значение фазового вектора и скорость его изменения в момент τ, $y(\cdot) = \big\{y(\tau), t_* \leqslant \tau \leqslant T\big\}$, $u(\tau)$ — текущее воздействие управления, $v(\tau)$ — воздействие помехи, $\mathbb{P}$ и $\mathbb{Q}$ — компакты конечномерных пространств, t_*, t_0 и T $(t_* < t_0 < T)$ — фиксированные моменты времени, t — момент начала процесса управления, C — пространство непрерывных n-мерных вектор-функций, определенных на $[t_*, T]$. Цель управления — доставить показателю (3) как можно меньшее значение. Предполагается, что отображения $f : [t_*, T] \times C \times \mathbb{P} \times \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}^n$,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке, гранта Президента РФ МД-6133.2006.1 и РФФИ (грант 06–01–00436).

$h : [t_*, T] \times C \times \mathbb{P} \times \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}$ и $\sigma : C \mapsto \mathbb{R}$ непрерывны. При этом отображения f и h являются *неупреждающими* по $\tau, y(\cdot)$: если $x(\tau) = y(\tau)$ при $t_* \leqslant \tau \leqslant t$, то $f\big(t, x(\cdot), u, v\big) = f\big(t, y(\cdot), u, v\big)$, $h\big(t, x(\cdot), u, v\big) = h\big(t, y(\cdot), u, v\big)$. Кроме того, существует такая константа $c > 0$, что

$$\big\|f\big(\tau, y(\cdot), u, v\big)\big\| + \big|h\big(\tau, y(\cdot), u, v\big)\big| \leqslant \rho\big(\tau, y(\cdot)\big) = \Big(1 + \max_{t_* \leqslant \xi \leqslant \tau} \|y(\xi)\|\Big)c$$

и для всякого компакта $D \subset C$ существует $\lambda = \lambda(D) > 0$ такое, что для всех $y(\cdot), z(\cdot) \in D$ справедлива оценка

$$\big\|f\big(\tau, y(\cdot), u, v\big) - f\big(\tau, z(\cdot), u, v\big)\big\| + \big|h\big(\tau, y(\cdot), u, v\big) - h\big(\tau, z(\cdot), u, v\big)\big| \leqslant$$
$$\leqslant \lambda\left(\|y(\tau) - z(\tau)\| + \sum_{j=1}^{M} \|y(\tau - \vartheta_j) - z(\tau - \vartheta_j)\| + \sqrt{\int_{t_*}^{\tau} \|y(\xi) - z(\xi)\|^2 \mathrm{d}\xi}\right),$$

где $0 < \vartheta_j \leqslant t_0 - t_*$ $\big(j = \overline{1, M}\,\big)$ — сосредоточенные запаздывания времени.

Далее будем рассматривать непрерывные *неупреждающие* функционалы $\varphi = \varphi\big(t, x(\cdot)\big)$, $t \in [t_*, T]$, $x(\cdot) \in C$ при условии $\varphi\big(T, x(\cdot)\big) \geqslant \sigma\big(x(\cdot)\big)$.

Определение. Функционал φ называем *стабильным* (u-стабильным в терминологии [1–3]), если для любых $t \in [t_0, T)$, $x(\cdot) \in C$, $\tau^* \in (t, T]$ и любой измеримой по Борелю функции $v[\cdot] : \mathbb{P} \mapsto \mathbb{Q}$ дифференциальное включение

$$\big(\dot{y}(\tau), \dot{\eta}(\tau)\big) \in \mathrm{co}\Big\{\Big(f\big(\tau, y(\cdot), u, v[u]\big), h\big(\tau, y(\cdot), u, v[u]\big)\Big)\Big| u \in \mathbb{P}\Big\}$$

имеет решение, удовлетворяющее условию (2), равенству $\eta(t) = \varphi\big(t, x(\cdot)\big)$ и неравенству $\eta(\tau^*) \geqslant \varphi\big(\tau^*, y(\cdot)\big)$.

Здесь символ «co» означает выпуклую оболочку в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Стабильные функционалы замечательны тем (см. [1–3, 8]), что, управляя системой (1), (2) на основе экстремального сдвига по такому функционалу φ, можно с наперед заданной точностью $\varepsilon > 0$ обеспечить неравенство

$$\gamma \leqslant \varphi\big(t, x(\cdot)\big) + \varepsilon, \tag{4}$$

какова бы ни была реализация помехи $v(\cdot)$.

Через $\mathrm{Lip}\big(t, x(\cdot)\big)$ обозначим множество функций $y(\cdot) \in C$, удовлетворяющих (2) и липшицевых на $[t, T]$; через $\mathrm{Lip}_K\big(t, x(\cdot)\big)$ — множество таких $y(\cdot) \in \mathrm{Lip}\big(t, x(\cdot)\big)$, которые на $[t, T]$ удовлетворяют условию Липшица с константой $K > 0$. Символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначаем скалярное произведение.

Непрерывный неупреждающий функционал ψ называем *коинвариантно гладким*, если для любых $t \in [t_0, T)$, $x(\cdot) \in C$ и $y(\cdot) \in \mathrm{Lip}\big(t, x(\cdot)\big)$ имеет место равенство

$$\psi\big(\tau, y(\cdot)\big) - \psi\big(t, x(\cdot)\big) = (\tau - t)\partial_t\psi + \big\langle y(\tau) - x(t), \nabla\psi\big\rangle + o_y(\tau - t),\ \tau \in (t, T],$$

где величины $\partial_t\psi = \partial_t\psi\big(t, x(\cdot)\big) \in \mathbb{R}$ и $\nabla\psi = \nabla\psi\big(t, x(\cdot)\big) \in \mathbb{R}^n$ непрерывны и не зависят от выбора $y(\cdot) \in \mathrm{Lip}\big(t, x(\cdot)\big)$, а бесконечно малая o_y может зависеть от этого выбора, $o_y(\delta)/\delta \to 0$ при $\delta \to 0$. В терминологии [5] величины $\partial_t\psi$, $\nabla\psi$ представляют собой коинвариантные производные функционала ψ, в терминологии [6] — Clio-производные.

Пусть $\mathbb{F}$ – выпуклый компакт из $\mathbb{R}^n$, $[\mathbb{F}]^\varepsilon$ — его замкнутая ε-окрестность. Положим

$$\mathrm{d}^-\big\{\psi\big(t, x(\cdot)\big)\big|\mathbb{F}\big\} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\ \inf_{y(\cdot)\in\Omega_\varepsilon}\ \liminf_{\tau\to t+0} \frac{\psi\big(\tau, y(\cdot)\big) - \psi\big(t, x(\cdot)\big)}{\tau - t},$$

где

$$\Omega_\varepsilon = \Big\{y(\cdot) \in \mathrm{Lip}\big(t, x(\cdot)\big) : \dot{y}(\tau) \in [\mathbb{F}]^\varepsilon \text{ п. в. } \tau \in [t, T]\Big\};$$

$$H\big(t, x(\cdot), s\big) = \min_{u\in\mathbb{P}}\max_{v\in\mathbb{Q}}\Big[\big\langle s, f\big(t, x(\cdot), u, v\big)\big\rangle - h\big(t, x(\cdot), u, v\big)\Big];$$

$$\mathbb{B}\big(t, x(\cdot)\big) = \Big\{f \in \mathbb{R}^n : \|f\| \leqslant \rho\big(t, x(\cdot)\big)\Big\}.$$

Теорема 1. *Для непрерывного неупреждающего функционала φ следующие условия эквивалентны:*

(a) *для любых $t \in [t_0, T)$, $x(\cdot) \in C$ и $s \in \mathbb{R}^n$ найдется такая функция $y(\cdot) \in \mathrm{Lip}\big(t, x(\cdot)\big)$, что $\big\|\dot{y}(\tau)\big\| \leqslant \rho\big(\tau, y(\cdot)\big)$ при почти всех $\tau \in [t, T]$ и*

$$\varphi\big(\tau, y(\cdot)\big) - \varphi\big(t, x(\cdot)\big) \leqslant \int_t^\tau \big\langle \dot{y}(\xi), s\big\rangle - H\big(\xi, y(\cdot), s\big)\,\mathrm{d}\xi,\ \ \tau \in [t, T];$$

(b) *для любых $t \in [t_0, T)$, $x(\cdot) \in C$ и $s \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство*

$$\mathrm{d}^-\Big\{\varphi\big(t, x(\cdot)\big) - \big\langle s, x(t)\big\rangle \,\big|\, \mathbb{B}\big(t, x(\cdot)\big)\Big\} + H\big(t, x(\cdot), s\big) \leqslant 0;$$

(c) *для любого неупреждающего коинвариантно гладкого функционала ψ всякий раз, когда при некоторых $t \in [t_0, T)$, $x(\cdot) \in C$ и $K > \rho\big(t, x(\cdot)\big)$ вдоль функций $y(\cdot) \in \mathrm{Lip}_K\big(t, x(\cdot)\big)$ разность $\varphi - \psi$ достигает на отрезке $[t, T]$ локальный минимум в точке t, выполняется неравенство*

$$\partial_t\psi\big(t, x(\cdot)\big) + H\Big(t, x(\cdot), \nabla\psi\big(t, x(\cdot)\big)\Big) \leqslant 0.$$

Согласно [7] стабильные функционалы φ удовлетворяют условию (a). В [8] показано, что по функционалу φ, удовлетворяющему условию (a), можно построить стратегию управления, гарантирующую неравенство (4). Таким образом, опираясь на условие (a), можно говорить о функционалах, стабильных относительно класса систем (1)–(3) с одним и тем же гамильтонианом H. Это условие характеризует стабильные функционалы как *верхние минимаксные решения* [4, 8] следующего уравнения типа Гамильтона–Якоби с коинвариантными производными:

$$\partial_t\varphi\big(t, x(\cdot)\big) + H\Big(t, x(\cdot), \nabla\varphi\big(t, x(\cdot)\big)\Big) = 0.$$

Согласно подходу [9, 10] условие (c) позволяет интерпретировать стабильные функционалы как *верхние вязкостные решения* этого уравнения. Условия (a) и (c) носят нелокальный характер. Условие (b) представляет их выражение в инфинитезимальной форме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
3. Осипов Ю. С. Дифференциальная игра наведения для систем с последействием // Прикладная математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 1. С. 123–131.
4. Subbotin A. I. Generalized Solutions of First–Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhäuser, 1995.
5. Ким А. В. i-гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: УрО РАН, 1996.
6. Aubin J. P., Haddad G. History path dependent optimal control and portfolio valuation and management // Positivity. 2002. Vol. 6. P. 331–358.
7. Lukoyanov N. Yu. Functional Hamilton–Jacobi type equations in ci-derivatives for systems with distributed delays // Nonlinear Funct. Anal. and Appl. 2003. Vol. 8, № 3. P. 365–397.
8. Лукоянов Н. Ю. Дифференциальные неравенства для негладкого функционала цены в задачах управления системами с последействием // Труды ИММ УрО РАН. 2006. Т. 12, № 2. С. 108–118.
9. Crandall M. G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, № 1. P. 1–42.
10. Soner H. M. On the Hamilton–Jacobi–Bellman equations in Banach spaces // J. Optim. Theory and Appl. 1988. Vol. 57, № 3. P. 429–437.

Поступила в редакцию 05.02.08

N. Yu. Lukoyanov
Stable functionals in control problems with hereditary information

The paper presents conditions that determine the u-stable functionals of the history of motion in control problems of hereditary dynamical systems.

Лукоянов Николай Юрьевич
Институт математики
и механики УрО РАН
620219, Россия, г. Екатеринбург,
ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: nyul@imm.uran.ru