ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 519.622

© ***А. В. Лекомцев***

ПОЛУЯВНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассматриваются системы, содержащие эффект запаздывания и дополнительные алгебраические связи. Конструируются полуявные численные методы типа Розенброка. Приведена теорема о порядке глобальной погрешности.

Ключевые слова: функционально-дифференциально-алгебраические уравнения, численные методы, метод Розенброка.

Рассмотрим систему функционально-дифференциально-алгебраических уравнений

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), z(t), y_t(\cdot), z_t(\cdot)), \quad 0 = g(t, y(t), z(t), y_t(\cdot), z_t(\cdot)) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0,$$

$$y_{t_0}(\cdot) = \{y^0(s),\ -\tau \leqslant s < 0\}, \quad z_{t_0}(\cdot) = \{z^0(s),\ -\tau \leqslant s < 0\},$$

где $t \in [t_0, t_0+\theta] \subset \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^m$.

Предположим, что существует единственное решение задачи (1) на $[t_0, t_0+\theta]$. Кроме того, предположим, что матрица Якоби g_z существует и обратима в своей области определения.

S-этапным методом типа Розенброка с набором коэффициентов α_i, σ_i, α_{ij}, γ_{ij} будем называть численную модель следующего вида:

$$u_{l+1} = u_l + \sum_{i=1}^{s} \sigma_i \cdot k_i(u_{t_l}(\cdot), v_{t_l}(\cdot)),\ v_{l+1} = v_l + \sum_{i=1}^{s} \sigma_i \cdot p_i(u_{t_l}(\cdot), v_{t_l}(\cdot)), \tag{2}$$

где отображения $k_i(u_{t_l}(\cdot), v_{t_l}(\cdot))$ и $p_i(u_{t_l}(\cdot), v_{t_l}(\cdot))$ определяются как последовательное решение следующих s систем относительно неизвестных k_i и p_i:

$$k_i = \Delta \cdot f(t_l + \alpha_i\Delta, r_i, w_i, u_{t_l+\alpha_i\Delta}(\cdot), v_{t_l+\alpha_i\Delta}(\cdot)) + \\ + \Delta \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij}\Big(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot k_j + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot p_j\Big) + \Delta^2 \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} \partial_t f, \qquad i = 1, \ldots, s, \tag{3}$$

$$0 = \Delta \cdot g(t_l + \alpha_i \Delta, r_i, w_i, u_{t_l+\alpha_i\Delta}(\cdot), v_{t_l+\alpha_i\Delta}(\cdot)) + \\ + \Delta \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} (\frac{\partial g}{\partial u} \cdot k_j + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot p_j) + \Delta^2 \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} \partial_t g, \quad i = 1, \ldots, s. \quad (4)$$

Здесь через r_i, w_i обозначены следующие выражения: $r_i = u_l + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \cdot k_j(u_{t_l}(\cdot), v_{t_l}(\cdot))$, $w_i = v_l + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \cdot p_j(u_{t_l}(\cdot), v_{t_l}(\cdot))$, $i = 1, \ldots, s$.

Через $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ и $\partial_t f$ обозначены матрица частных производных и коинвариантная производная в точке $(t_l, u_l, v_l, u_{t_l}(\cdot), v_{t_l}(\cdot))$ (см. [1, с. 41]).

Доказано, что *при некоторых ограничениях на систему* (1) *и шаг разбиения* Δ *система* (3)–(4) *разрешима.*

Теорема 1. *Пусть метод* (2)–(4) *имеет невязку* [1, с. 105] *порядка* p, *оператор интерполяции-экстраполяции предыстории модели* [1, с. 97, 102] *имеет порядок* p. *Тогда метод сходится, причем порядок сходимости метода не меньше* p.

Например, удалось получить следующие коэффициенты метода третьего порядка: $\alpha_2 = 0.6$, $\alpha_3 = \alpha_4 = 1$, $\sigma_1 = \dfrac{8}{27}$, $\sigma_2 = \dfrac{125}{216}$, $\sigma_3 = 0$, $\sigma_4 = \dfrac{1}{8}$,

$$(\gamma_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{25} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{5}{27} & -\frac{25}{108} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{29}{54} & \frac{25}{54} & 0 & 0 \\ \frac{2}{27} & \frac{25}{27} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

* * *

1. Ким А. В., Пименов В. Г. i-гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005.

Поступила в редакцию 08.02.08

A. V. Lekomtsev

Semiexplicit method for functional differential algebraic equations

The paper presents the numerical solution method for functional differential algebraic equations.

Лекомцев Андрей Валентинович
Уральский государственный университет,
620083, Россия, г. Екатеринбург,
пр. Ленина, 51
E-mail: lekom@olympus.ru