ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.929

© *А. С. Ларионов*

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Приводятся достаточные условия существования положительных решений для некоторых классов дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Условия получены на основе редукции задачи Коши для данного дифференциального уравнения к уравнению с монотонным оператором.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, монотонный оператор, положительное решение.

Теоремы о дифференциальном и интегральном неравенствах играют важную роль при построении оценок решений уравнений [1, 2]. Утверждения о неравенствах доказываются на основе редукции исходного уравнения к эквивалентному в определенном смысле уравнению $x = Ax$ с монотонным оператором A. Редукция к уравнению $x = Ax$ проводится по схемам, предложенным Н. В. Азбелевым.

Обозначим $\mathbf{L}_p[0,b]$, $1 \leqslant p < \infty$ — банахово пространство функций $z : [0,b] \to \mathbf{R}^1$, суммируемых на $[0,b]$ со степенью p; $\mathbf{L}_\infty[0,b]$ — банахово пространство функций $z : [0,b] \to \mathbf{R}^1$, измеримых и ограниченных в существенном. Рассмотрим задачу Коши

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \ddot{x}(t) - \sum_{i=1}^{m_1} b_i(t)\ddot{x}_{g_i}(t) = f(t, x_{h_1}(t), \ldots, x_{h_{m_2}}(t)),\ t \in [0,b], \tag{1}$$

$$x(0) = \alpha, \quad \dot{x}(0) = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}^+, \tag{2}$$

где

$$y_r(t) = \begin{cases} y[r(t)], & \text{если} \quad r(t) \in [0,b], \\ 0, & \text{если} \quad r(t) \notin [0,b] \end{cases}$$

в предположениях: функция $f : [0,b]\times\mathbf{R}^{m_2} \to \mathbf{R}^1$ удовлетворяет условиям Каратеодори; функции $b_i : [0,b] \to \mathbf{R}^1$ измеримы и ограничены в существенном; функции g_i, $h_j : [0,b] \to \mathbf{R}^1$ измеримы, $g_i(t) \leqslant t$, $h_j(t) \leqslant t$ почти всюду на $[0,b]$, $i = 1, \ldots, m_1$, $j = 1, \ldots, m_2$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-01-00744-а).

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

Будем предполагать, что оператор суперпозиции S, определяемый равенством

$$(Sy)(t) = \sum_{i=1}^{m_1} b_i(t)(S_{g_i}y)(t),$$

действует в пространствах $\mathbf{L}_p[0,b]$ и спектральный радиус оператора S меньше единицы [2].

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:* $f(t,0,\ldots,0) = 0$, $t \in [0,b]$; *функция* $f(t,u_1,\ldots,u_{m_2})$ *является невозрастающей по аргументам* u_j, $j = 1,\ldots,m_2$; *при всех* $t \in [0,b]$ *справедливо неравенство*

$$\alpha + \beta t + \int_0^b (b-s) f\left(s, \alpha + \beta h_1(s), \ldots, \alpha + \beta h_{m_2}(s)\right) ds \geqslant 0.$$

Тогда существует решение x *задачи* (1), (2), *удовлетворяющее неравенствам* $0 \leqslant x \leqslant \alpha + \beta t$.

* * *

1. Азбелев Н. В., Рахматуллина Л. Ф. К вопросу о функционально-дифференциальных неравенствах и монотонных операторах // Функц.-дифференц. уравнения. Пермь: Изд-во Перм. политех. ин-та, 1986. С. 3–9.
2. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

Поступила в редакцию 25.02.08

A. S. Larionov
Positive solutions of functional differential equations

The sufficient conditions for existence of positive solutions are presented for some class of differential equations with deviating argument. These conditions have been obtained on the basis of reduction of Cauchy problem for the given differential equation to the equation with a monotone operator.

Ларионов Александр Степанович
Братский государственный университет
665709, Россия, Иркутская
область, г. Братск,
ул. Макаренко, 40
E-mail: kafmath@brstu.ru