ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.934

© *Н. Н. Красовский, А. Н. Котельникова*

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ В УСЛОВИЯХ КОНФЛИКТА [1]

Рассматривается задача об оптимальном управлении по быстродействию. Обсуждаются достаточные условия локальной оптимальности, связанные с необходимыми условиями принципа максимума Понтрягина [1] при условии полной управляемости системы в вариациях. Задача обсуждается для системы, описываемой векторным дифференциальным уравнением, обыкновенным или с последействием. В случае конфликтного управления обсуждается задача оптимального управления по критерию минимакса-максимина времени выхода системы в заданное состояние. Рассматривается модельный пример и обсуждается соответствующий вычислительный эксперимент.

Ключевые слова: оптимальное управление, локальная оптимальность по быстродействию, конфликтное управление, минимакс, максимин времени до встречи, интегро-дифференциальное уравнение, обобщенное решение, предельная система в вариациях, фундаментальная матрица системы в вариациях, полная управляемость, функционал Ляпунова.

В работе рассматриваются две системы, которые относятся к кругу задач об управлении, когда движение $x[t]$ описывается интегро-дифференциальным уравнением

$$\dot{x}[t] = H\Big(t, x[t]; u[t], v[t]) + \int_{t_0}^{t} d_\vartheta G(t, \vartheta; x[\vartheta]\Big), \tag{1}$$

$$t_0 \leqslant t < \infty; \quad x = \{x_1, \ldots, x_n\}; \quad u = \{u_1, \ldots, u_r\}; \quad v = \{v_1, \ldots, v_r\}.$$

Здесь $u[t]$ и $v[t]$ — реализации конфликтующих управлений, для которых оговорены ограничения $u \in U$, $v \in V$, U и V — компакты; $\dot{x}[t]$ — правая производная; x, u, v — векторы-столбцы.

Для рассматриваемых уравнений с последействием интерпретируются достаточные условия локальной оптимальности по быстродействию и

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке (грант Президента РФ НШ №8512.2006.1 и грант РФФИ №06-01-00436).

подход к задаче о конфликтном управлении по критерию минимакса-максимина времени до встречи, предложенные в [2, 3] для случаев обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения уравнений трактуются как конструктивные движения в согласии с [4]: движения $x[t]$ формализуются как пределы последовательностей решений подходящих аппроксимирующих уравнений. В линейном случае обобщенная фундаментальная матрица решений $\bar{F}(t,\vartheta)$ и управления $u[t], v[t]$ формализуются на основе предельных переходов. В общем нелинейном случае, как и в работе [4], управляющие воздействия могут формально игнорироваться, а по сути дела они могут аннигилироваться. Содержательно движения $x[t]$ строятся в аппроксимационной схеме. При этом интеграл Стилтьеса в уравнениях вида (1) аппроксимируется последовательностями импульсов.

Для уравнения частного вида

$$\dot{x}[t] = H\big(t, x[t]\big) + \int_{t_0}^{t} G\big(t,\vartheta,x[\vartheta]\big)d\vartheta + \sum_{s=0}^{s[t]} G^{[s]}\big(t, x[t^{[s]}]\big) + B(t)u[t], \tag{2}$$

$$t_0 \leqslant t < \infty, \quad t^{[0]} = t_0, \quad t^{[s]} < t^{[s+1]}, \quad s[t] = \max[s : t^{[s]} \leqslant t]$$

рассматривается задача о локальной оптимальности по быстродействию:

$$x[t_0] = x_0, \quad x[T] = x^0, \quad T^0 = \min T.$$

В (2) функции H, G, $G^{[s]}$, B непрерывны, функции H, G, $G^{[s]}$ дважды непрерывно дифференцируемы по x. Заданы ограничения

$$\|u\|^* = \max\{|u_s|\colon\, s = 1,\dots,r\} \leqslant 1.$$

Используются аппроксимирующие уравнения:

$$\dot{x}[t] = H\big(t, x[t]\big) + \sum_{\nu=0}^{\nu[t]} G^{(\nu)}\big(t, x[\vartheta^{(\nu)}]\big), \tag{3}$$

$$\vartheta^{(\nu)} < \vartheta^{(\nu+1)}, \quad \nu[t] = \max[\nu : \vartheta^{(\nu)} \leqslant t].$$

Во множестве $\{\vartheta^{(\nu)}\}$ содержатся все $t^{[s]}$, при $\vartheta^{(\nu)} = t^{[s]}$ имеем $G^{(\nu)} = G^{[s]}$, иначе $G^{(\nu)}\big(t, x[\vartheta^{(\nu)}]\big) = G\big(t, \vartheta^{(\nu)}, x[\vartheta^{(\nu)}]\big)\big(\vartheta^{(\nu+1)} - \vartheta^{(\nu)}\big)$. Конструктивное движение $x[t]$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$ — решение исходного уравнения (2) — определяется как равномерный предел для некоторой последовательности решений $x^{[l]}[t]$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, $l = 1, 2, \dots,$ отвечающей некоторой последовательности аппроксимирующих уравнений (3), причем предполагаем, что $\lim\limits_{l\to\infty} \max\limits_{\nu}\big(\vartheta^{(\nu+1,l)} - \vartheta^{(\nu,l)}\big) = 0$. Системе в вариациях

$$\dot{\delta x}[t] = P(t)\delta x[t] + \sum_{\nu=0}^{\nu[t]} Q^{(\nu)}(t)\delta x[\vartheta^{(\nu)}] + B(t)\delta u[t] \tag{4}$$

для уравнения (3) для некоторого решения $x[t]$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$ этого уравнения отвечает обобщенная фундаментальная матрица решений $\bar{F}(t,\vartheta) = \{\tilde{F}^{[x]}(t,t_0), \tilde{F}(t,\vartheta)\}$. Для нее по формуле Коши для уравнения

$$\dot{x}[t] = P(t)x[t] + f(t) \tag{5}$$

уже на основе фундаментальной матрицы $F(t,\vartheta)$ для однородной части этого уравнения (5) естественно получаются следующие рекуррентные соотношения при $\vartheta^{(\nu)} < \tau \leqslant \vartheta^{(\nu+1)}$, $\nu = 0, 1, \ldots$

$$\tilde{F}^{[x]}(\tau,t_0) = F(\tau,t_0) + \sum_{\zeta=0}^{\nu} \int_{\vartheta^{(\zeta)}}^{\tau} F(\tau,\eta)Q^{(\zeta)}(\eta)d\eta \tilde{F}^{[x]}(\vartheta^{(\zeta)},t_0), \tag{6}$$

$$\tilde{F}(\tau,\vartheta) = F(\tau,\vartheta) + \sum_{\zeta=1}^{\nu} \int_{\vartheta^{(\zeta)}}^{\tau} F(\tau,\eta)Q^{(\zeta)}(\eta)d\eta \tilde{F}(\vartheta^{(\zeta)},\vartheta). \tag{7}$$

Таким образом, решение $\delta x[t]$ уравнения (4) записывается в виде

$$\delta x[t] = \tilde{F}^{[x]}(t,t_0)\delta x[t_0] + \int_{t_0}^{t} \tilde{F}(t,\vartheta)B(\vartheta)\delta u[\vartheta]. \tag{8}$$

Обобщенная фундаментальная матрица $\bar{F}(t,\vartheta)$ для системы в вариациях для конструктивного движения $x[t]$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$ — решения уравнения (2) — определяется предельным переходом от последовательности $\{\tilde{F}^{[x,l]}, \tilde{F}^{[l]}\}$ фундаментальных матриц, отвечающих системам в вариациях для аппроксимирующих уравнений (3).

Обсуждаются достаточные условия, которые связывают конструкции принципа максимума [1], классические условия [5] для второй вариации $\delta^{[2]}x[t]$ и условия управляемости [6–8] для системы в вариациях на оптимальном движении $x^0[t]$.

Условие 1. Обобщенная система в вариациях для исходного уравнения (2) на движении $x^0[t]$ (и аппроксимирующие ее системы (4)) *сильно вполне управляемы* по каждой координате u_s, $s = 1, \ldots, r$: для каждого вектора $|l| \neq 0$ равенство $\|l'\tilde{F}(T,\tau)b^{[s]}(\tau)\| = 0$ возможно лишь для конечного множества значений $\tau_k^{[s]}(T)$, $k \leqslant k^{[s]}(T)$; $\|\cdot\|$ — норма, с которой сопряжена норма $\|\cdot\|^*$, индекс штрих — знак транспонирования.

Условие 2. Обобщенное оптимальное управление $u^0[t]$ для движения $x^0[t]$ определяется как слабый предел последовательности управляющих воздействий $u^{[l]}$ для подходящей последовательности аппроксимирующих движений $x^{[l]}[t]$. Полагаем, что управление $u^0[t]$ удовлетворяет условию максимума

$$l^{0\prime}(T^0)\tilde{F}(T^0,t)B(t)u^0[t] = \max_{\|u\|^* \leqslant 1} l^{0\prime}(T^0)\tilde{F}(T^0,t)B(t)u.$$

У с л о в и е 3. Выполнено неравенство $l^{0\prime}(T^0)\dot{x}^0[T^0]_{-0} \geqslant \zeta,\ \ \zeta > 0$.

У с л о в и е 4. Векторы $a_k^{[s]}$, определяющие влияние допустимых вариаций $\delta u[t]$ в малых окрестностях критических точек $\tau_k^{[s]}(T^0)$, формализуются на базе искусственно вводимых импульсных вариаций $\delta(\tau - \tau_k^{[s]})$. Эти векторы $a_k^{[s]}$ представляются в следующей форме:

$$a_k^{[s]} = \int\limits_{\tau_k^{[s]}}^{T^0} \tilde{F}(T^0,\tau)\Big[\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\frac{\partial^2 H(\tau,x)}{\partial x_i \partial x_j}\Big)_{x^0[\tau]}\Big[\tilde{F}(\tau,\tau_k^{[s]})b^{[s]}(\tau_k^{[s]})\Big]_i\Big[\tilde{F}(\tau,\tau_k^{[s]})b^{[s]}(\tau_k^{[s]})\Big]_j$$

$$+\int\limits_{\tau_k^{[s]}}^{\tau}\left(\frac{\partial^2\big[d_\vartheta G(\tau,\vartheta;x[\vartheta])\big]}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{x^0[\cdot]}\Big[\tilde{F}(\vartheta,\tau_k^{[s]})b^{[s]}(\tau_k^{[s]})\Big]_i\Big[\tilde{F}(\vartheta,\tau_k^{[s]})b^{[s]}(\tau_k^{[s]})\Big]_j d\vartheta\Big]d\tau.$$

Полагаем, что выполнены неравенства $l^{0\prime}(T^0)a_k^{[s]} \leqslant -\gamma < 0,\ \ k \leqslant k^{[s]}(T^0)$.

Утверждение 1. *При условиях* 1–4 *движение* $x^0[\cdot]$ *локально оптимально, то есть существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что не существует допустимого движения* $x^*[\cdot]$, *которое удовлетворяло бы условиям*

$$x^*[t_0] = x_0, \quad x^*(T^*) = x^0, \quad T^* < T^0, \quad \big|x^*[t] - x^0[t]\big| < \varepsilon, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T^*.$$

У с л о в и е 5. Выполнено условие *очень сильной полной управляемости*: при условии 1 для каждой критической точки $\tau_k^{[s]}$ в достаточно малой ее окрестности $|\tau - \tau_k^{[s]}| < \delta$, где $\delta > 0$, выполняются неравенства $\|l^{0\prime}(T^0)\tilde{F}(T^0,\tau)b(\tau)\| \geqslant \sigma|\tau - \tau_k^{[s]}|,\ \ \sigma > 0$.

Утверждение 2. *При условиях* 1–3, 5 *существует такое значение* $\gamma(\zeta,\nu) > 0$, *что при выполнении неравенств* $l^{0\prime}a_k^{[s]} \leqslant \gamma,\ \ s = 1,\ldots,r,$ $k \leqslant k^{[s]}$ *движение* $x^0[\cdot]$ *будет локально оптимальным по быстродействию.*

Следствие 1. *При условиях* 1–3, 5 *существует такое* $\beta > 0$, *что при выполнении неравенств* $\Big|\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}\Big| \leqslant \beta$ *и* $\Big|\dfrac{\partial^2 dG}{\partial x_i \partial x_j}\Big| \leqslant \beta,\ \ i,j = 1,\ldots,n$ *движение* $x^0[\cdot]$ *будет локально оптимальным по быстродействию.*

Для системы, описываемой линейным уравнением

$$\dot{x}[t] = P(t)x[t] + \int_{t_0}^{t} G(t,\vartheta)x[\vartheta]d\vartheta + \sum_{s=0}^{s[t]} G^{[s]}(t)x[t^{[s]}] + B(t)(u[t] - v[t]), \quad (9)$$

$t_0 \leqslant t < \infty$, рассматривается задача на минимакс-максимин τ^0 времени τ до встречи $|x^{[m]}[\tau]| = \varepsilon_M > 0$. Здесь $x^{[m]}$ — вектор из первых m координат $1 \leqslant m \leqslant n$ вектора x; $\|u\|^* \leqslant \beta$, $\|v\|^* \leqslant \gamma$, $\beta - \gamma = \rho > 0$, $\gamma > 0$, $\|w\|^*$ — некоторая оговоренная норма; величина ε_M задана.

Здесь в приложении к уравнению (9) трансформируются экстремальные прицеливание и сдвиг, использованные для обыкновенных уравнений [4, 8]. Строятся стратегии сближения $u^0(x[\vartheta], t_0 \leqslant \vartheta \leqslant t)$ и α-уклонения $v^\alpha(x[\vartheta], t_0 \leqslant \vartheta \leqslant t)$. Стратегия $u^0(\cdot)$, гарантирующая встречу $|x^{[m]}[\tau]| = \varepsilon_M$ не позже момента τ^0, определяется из условия минимума производной $\dot{\varepsilon}_t$ для функционала Ляпунова

$$\varepsilon(x[\vartheta], t_0 \leqslant \vartheta \leqslant t, \tau^0) = \\ = \max_{|l|=1}(l'\tilde{x}[\tau^0] + \min_u \max_v l' \int_t^{\tau^0} \tilde{F}(\tau^0, \vartheta) B(\vartheta)(u[\vartheta] - v[\vartheta]) d\vartheta). \quad (10)$$

Для реализации $u^0[t]$ это дает условие

$$l^{0\prime}(t, \tau^0)\tilde{F}(\tau^0, t)B(t)u^0[t] = \min_{\|u\|^* \leqslant \beta} l^{0\prime}(t, \tau^0)\tilde{F}(\tau^0, t)B(t)u, \quad (11)$$

где $l^{0\prime}(t, \tau)$ — максимизирующий вектор в (10).

Стратегия $v^\alpha(\cdot)$, гарантирующая при сколь угодно малом $\alpha > 0$ уклонение $|x^{[m]}[t]| > \varepsilon_M$ по крайней мере до момента $\tau^0 - \alpha$, определяется из условия минимума производной $\dot{\lambda}_t$ для функционала Ляпунова

$$\lambda^\alpha(x[\vartheta], t_0 \leqslant \vartheta \leqslant t, \tau^0 - \alpha) = \int_t^{\tau^0 - \alpha} [\varepsilon(x[\vartheta], t_0 \leqslant \vartheta \leqslant t, \tau) - \varepsilon_M]^{-1} d\tau. \quad (12)$$

Для реализации $v^\alpha[t]$ это дает условие

$$s'[t, \tau^0 - \alpha]B(t)v^\alpha[t] = \min_{\|v\|^* \leqslant \gamma} s'[t, \tau^0 - \alpha]B(t)v. \quad (13)$$

Здесь вектор $s[t, \tau^0 - \alpha]$ определен равенством

$$s[t, \tau^0 - \alpha] = \int_t^{\tau^0 - \alpha} [\varepsilon(x[\vartheta], t_0 \leqslant \vartheta \leqslant t, \tau) - \varepsilon_M]^{-2} l^0(t, \tau)\tilde{F}^{[u]}(\tau, t) d\tau. \quad (14)$$

В (10) $\tilde{x}[\tau^0]$ формируется по истории $\{x[\vartheta], t_0 \leqslant \vartheta \leqslant t\}$ на базе фундаментальной матрицы $\tilde{F}^{[x]}(\tau, \vartheta)$, $t_0 \leqslant \vartheta \leqslant t$ для движения $x[\tau]$ (9); учитываются аппроксимационные и предельные соотношения, подобные (6), (8); τ^0 — наименьший корень уравнения $\varepsilon(x[\vartheta], t_0 \leqslant \vartheta \leqslant t, \tau) = \varepsilon_M$; вектор $l = \{l^{[m]}, \bar{0}\}$.

Критерии локальной оптимальности обсуждаются для случаев, когда управление u входит в исходное уравнение нелинейно. Тогда управляющие воздействия в необходимых условиях оптимальности принципа максимума формализуются как вероятностные меры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
2. Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования нелинейных систем // ПММ. 1959. Т. 23. С. 209–229.
3. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
4. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.
5. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. М.: ИЛ, 1950.
6. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления // Тр. I Конгресса ИФАК. 1961. Т. 1.
7. Гамкрелидзе Р.В. Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах // Известия АН СССР. 1958. Т. 22. С. 449–474.
8. Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования // ПММ. 1957. Т. 21. С. 670–677.

Поступила в редакцию 28. 01. 08

N. N. Krasovskii, A. N. Kotel'nikova
One problem of the optimal control of a system with aftereffect in conditions of conflict

In the paper a time-optimal control problem is considered. Sufficient conditions for local optimality are obtained which are linked with necessary conditions of Pontryagin's maximum principle under assumption of total controllability of a system in variations. The problem is studied for a system described by a vector differential equation either ordinary or with aftereffect. In the case of conflict control, the optimal control problem is discussed for a criterion of the minmax-maxmin time when the system attains a given state. The model example is given and the corresponding numerical experiment is discussed.

Красовский Николай Николаевич
Институт математики
и механики УрО РАН
Россия, г.Екатеринбург,
ул.Софьи Ковалевской, 16
e-mail: nnkras@imm.uran.ru

Котельникова Анна Николаевна
Институт математики
и механики УрО РАН
Россия, г.Екатеринбург,
ул.Софьи Ковалевской, 16
e-mail: annk222@rambler.ru