ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.911

© *Д. А. Короткий*

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассматривается задача нахождения оптимального управления для системы с запаздыванием. С помощью принципа максимума задача сводится к системе опережающе-запаздывающего типа. В некоторых случаях оптимальное управление может быть выражено через решение этой системы и эффективно вычислено.

Ключевые слова: система с запаздыванием, управление, принцип максимума, сопряженная система, система опережающе-запаздывающего типа.

Рассматривается следующая задача оптимального управления. Пусть задана управляемая система с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = f(\,t,\, x(t),\, x(t-\tau),\, u(t)\,), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x \in \mathbb{R}^n$$

с некоторой заданной функцией f и заданной предысторией $x(t_0 + s) = \varphi(t_0 + s)$, $s \in [-\tau, 0]$. Множество допустимых управлений U состоит из функций, значения которых принадлежат некоторому множеству $P \subseteq \mathbb{R}^m$. Требуется минимизировать интегральный функционал качества

$$J(u) = \int_{t_0}^{\vartheta} F\,(\,t, x(t), u(t)\,)\,dt \to \min:\ u \in U.$$

Для поставленной задачи справедливо необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума [1]: если $u^0(\cdot)$ — оптимальное управление, $x^0(\cdot)$ — оптимальная траектория, то

$$H(t, x^0(t), x^0(t-\tau), u^0(t), \psi(t)) = \max_{v\,\in\,P}\ H(t, x^0(t), x^0(t-\tau), v, \psi(t)),$$
$$H(t, x, y, u, \psi) = \psi^T f(t, x, y, u) - F(t, x, u),$$
$$\dot{\psi}(t) = G\,(\,t,\, \psi(t),\, \psi(t+\tau)), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad \psi(t) = 0,\ t \geqslant \vartheta,$$
$$G = -\psi^T(t)\ f_x(t,\, x^0(t),\, x^0(t-\tau),\, u^0(t)) + F_x(t,\, x^0(t),\, u^0(t)) -$$
$$-\psi^T(t+\tau)\ f_y(t+\tau,\, x^0(t+\tau),\, x^0(t),\, u^0(t+\tau)).$$

Объединив сопряженную систему с исходной, получим систему с опережением и запаздыванием. В некоторых случаях оптимальное управление можно выразить через решение этой системы. Приближенное решение системы [2, 3] даст некоторое приближение к оптимальному управлению.

В качестве примера расмотрим одномерную линейную систему

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)x(t-\tau) + c(t)u(t), \quad t \in [t_0, \vartheta]$$

с квадратичным функционалом качества, $F = x^2 + u^2$, $P = R$. Из принципа максимума легко найти $u^0(t) = 2^{-1}\psi(t)\, c(t)$. Соответствующая система с опережением и запаздыванием имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)x(t-\tau) + 2^{-1}c(t)^2\, \psi(t),\ t \in [t_0, \vartheta], \\ \dot{\psi}(t) = -\psi(t)a(t) + 2\, x(t) - \psi(t+\tau)b(t+\tau),\ t \in [t_0, \vartheta], \\ x(t_0+s) = \varphi(t_0+s),\ -\tau \leqslant s \leqslant 0; \quad \psi(t) = 0,\ t \geqslant \vartheta. \end{cases} \tag{1}$$

Запишем уравнения в этой системе в матричном виде:

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)z(t-\tau) + C(t)z(t+\tau), \quad z(t) = (x(t),\, \psi(t)).$$

Теорема 1. *Пусть для некоторого $\lambda > 0$ выполняется условие*

$$\|A\|_C\, \frac{1-e^{-\lambda l}}{\lambda} + \|B\|_C\, \frac{e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda(l+\tau)}}{\lambda} + \|C\|_C\, \frac{e^{\lambda\tau} - e^{\lambda(\tau-l)}}{\lambda} < 1 \ ,$$

тогда решение системы (1) *сушествует и единственно. Если $x_\Delta(\cdot)$ и $\psi_\Delta(\cdot)$ есть какое-нибудь приближенное решение этой системы, то*

$$u^0(t) \approx 2^{-1}\psi_\Delta(t)\, c(t), \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

* * *

1. Андреева Е. А., Колмановский В. Б., Шайхет Л. Е. Управление системами с последействием. М.: Наука, 1992.
2. Пименов В. Г., Короткий Д. А. О решении систем дифференциальных уравнений с опережением и запаздыванием // Известия Урал. гос. ун-та. Сер.: Матем. и мех. (вып. 9). 2006. № 44. С. 113–139.
3. Короткий Д. А. Нелинейная краевая задача с опережением и запаздыванием // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2006. Вып. 3 (37). С. 71–72.

Поступила в редакцию 11. 02. 08

D. A. Korotkii
Solution of the optimal control problem with delay

The paper presents a method of finding the optimal control problem for the system with delay. The problem is reduced to the mixed type system by means of the maximum principle. In some cases the optimal control can be expressed by solution of this system and effectively calculated.

Короткий Дмитрий Александрович
Уральский государственный университет
620151, Россия, г. Екатеринбург,
ул. Ленина, 51
E-mail: Dimkorot@rambler.ru