ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.977.5

© *Е. А. Колпакова*

# ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КЛАССА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК [1]

Рассматривается нелинейная задача оптимального управления с функционалом типа Майера. Для определения класса функций, содержащих оптимальные управления, применен метод характеристик уравнения Беллмана.

*Ключевые слова*: оптимальное управление, метод характеристик.

Рассматривается задача оптимального управления (ЗОУ) системой

$$\dot{x} = f(t,x) + g(u),$$

где $t \in [0,T]$, фазовый вектор $x \in \mathbb{R}^n$, управление $u \in \mathbb{R}^m$ принимает значения из компакта $U$. Требуется минимизировать функционал

$$I(t_0, x_0, u(\cdot)) = h(x(T; t_0, x_0, u(\cdot)))$$

на множестве $\tilde{U} = \{u(\cdot) : [0,T] \to U\}$ — измеримых функций. Начальное состояние $(t_0, x_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$.

У с л о в и е 1. Функция $f(t,x)$ непрерывна по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируема по $x$. Функции $g(u)$, $h(x)$ непрерывны и ограничены.

У с л о в и е 2. Множество $\arg\min\limits_{g}\{\langle q, g\rangle : g = g(u) : u \in U\} = \{g^0(q)\}$ одноэлементно.

Здесь символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение.

Рассмотрим характеристическую систему

$$\dot{x} = f(t,x) + g^0(q), \quad \dot{q} = -\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^T q$$

с краевыми условиями

$$x(T) = \xi,\ q(T) = Dh(\xi) = \Big(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial h}{\partial x_n}\Big)(\xi) :\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-01-00609) и гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ НШ № 8512.2006.1.

**Теорема 1.** *В ЗОУ при выполнении условий* 1, 2 *оптимальный результат* $Val(t_0, x_0) = \inf\limits_{u(\cdot)\in\tilde{U}} I(t_0, x_0, u(\cdot))$ *вычисляется по формуле*

$$Val(t_0, x_0) = \min\{h(\xi): \ x(t_0, \xi) = x_0, \ x(T, \xi) = \xi, \ q(T) = Dh(\xi), \ \xi \in \mathbb{R}^n\}.$$

Здесь $x(\cdot), q(\cdot)$ — решения характеристической системы. Доказательство базируется на необходимых условиях оптимальности в гамильтоновой форме [1].

**Теорема 2.** *В ЗОУ при выполнении условий* 1, 2 *оптимальный результат достигается в классе* $\tilde{U}$.

В основе доказательства лежит теорема Кастэна [2].

**Теорема 3.** *Если существует непрерывный селектор многозначного отображения* $q \to \{u^* \in U : g(u^*) = g^0(q)\}$, *то в ЗОУ существует непрерывное оптимальное управление.*

* * *

1. Субботина Н. Н. Метод характеристик для уравнений Гамильтона-Якоби и его приложения в динамической оптимизации // Современная математика и ее приложения. 2004. Т. 20. С. 1–129.
2. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 10. 02. 08

***E. A. Kolpakova***

**On description of optimal open-loop controls via the method of characteristics**

We consider nonlinear optimal control problems with the Mayer cost functionals. The method of characteristics for the Bellman equation is applied to describe classes of functions which contain optimal open-loop controls.

Колпакова Екатерина Алексеевна
Институт математики
и механики УрО РАН
620219, Россия, г. Екатеринбург,
ул. С.Ковалевской, 16
E-mail: eakolpakova@gmail.com