МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.9

© ***Н. Г. Колмогорцева, А. В. Пилюгин***

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

Рассматривается приближенное решение функционально-дифференциального уравнения на основе разложения решения в ряд Тейлора. Обсуждаются условия, гарантирующие необходимую гладкость решения.

Ключевые слова: системы с последействием, формула Тейлора, лайн-непрерывность, лайн-дифференцируемость функционалов.

Рассматривается задача нахождения приближенного решения функционально-дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(t, x, x_t(\cdot)) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x^0, \quad x_{t_0+s}(s) = y^0(s), \quad -\tau < s < 0. \tag{2}$$

Здесь $x(t) \in R^n$ — конечномерная составляющая решения, $\tau = const > 0$, $x_t(\cdot) = \{x(t+s), -\tau \leqslant s \leqslant 0\}$ — функция-предыстория решения.

Построение приближенного аналитического решения основывается на разложении решения функционально-дифференциального уравнения по формуле Тейлора и вычислении коэффициентов с использованием инвариантных и коинвариантных производных. Для конструктивного вычисления коэффициентов (см. [1]) ряда Тейлора используется техника и конструкции i-гладкого анализа (см. [2]).

В настоящей работе исследуется гладкость решений функционально-дифференциальных уравнений (1) в зависимости от гладкости правой части системы — отображения

$$f[t, x(t), x(t+\cdot)] : R \times R^n \times Q(-\tau, 0] \to R^n. \tag{3}$$

О п р е д е л е н и е 1. **а)** Отображение (3) называется *линейно-непрерывным (line-continuous)*, если оно непрерывно вдоль любой непрерывной (кривой) $\psi(\cdot) : [\alpha - \tau, \beta] \to R^n$, то есть функция $f(t, \psi(t), \psi(t+\cdot)) : [\alpha - \tau, \beta] \to R^n$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$; **б)** отображение (3) называется *линейно-дифференцируемым (line-differentiable)*, если оно дифференцируемо вдоль любой дифференцируемой кривой $\psi(\cdot)$, то есть если функция $\psi(\cdot)$ дифференцируемая, то функция $f(t, \psi(t), \psi(t+\cdot))$ также дифференцируема на $[\alpha, \beta]$.

О п р е д е л е н и е 2. **а)** Если отображение (3) имеет в каждой точке множества $\Omega \subseteq R^n \times Q(-\tau, 0]$ инвариантную производную $\partial_y f$, то соответствующее отображение $\partial_y f : \Omega \to R$ называется инвариантной производной отображения f на Ω; **б)** частные производные отображения $f[t, x, y(\cdot)]$ по конечномерным переменным t и x называются конечномерными производными.

Теорема 1. *Если отображение* (3) *имеет на множестве* $\Omega \subseteq R^n \times Q(-\tau, 0]$ *линейно-непрерывные конечномерные и инвариантные производные до p-го порядка, то всякое проходящее в этом множестве решение* $x(t)$ *уравнения* (1) *имеет непрерывные производные по* t $(p+1)$*-го порядка.*

Теорема 2. *Если отображение* (3) *имеет на множестве* $\Omega \subseteq R^n \times Q(-\tau, 0]$ *линейно-непрерывные конечномерные и инвариантные производные до p-го порядка, тогда для любого решения* $x(\cdot) : [\alpha - \tau, \beta] \to R^n$ *уравнения* (1) *и любого* $t \subseteq (\alpha, \beta)$ *справедливо разложение* $x(t) = x(t_*) + \sum\limits_{k=1}^{p} \frac{x_*^{(k-1)}}{k!}(t - t_*)^k + o((t - t_*)^p)$, *где* $x_*^{(k-1)}$ — *k-я полная производная отображения* f *в силу системы* (1), *вычисленная в точке* $(t_*, x(t_*), x(t_* + \cdot))$.

* * *

1. Ким А. В., Колмогорцева Н. Г. Моделирование уравнений с последействием на основе разложения в ряд Тейлора по инвариантным и коинвариантным производным // Вестн. УГТУ–УПИ. Информационные системы и технологии в радиотехнике, связи, автоматике и управлении: Серия радиотехническая. 2005. № 17(69). С. 269–278.
2. Ким А. В., Пименов В. Г. i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004.

Поступила в редакцию 15.02.08

N. G. Kolmogortseva, A. V. Pulyugin
Modelling of functional-differential equations using rows

An approximate solution is considered of the functional-differential equation based on Teylor-series expansion. The conditions are discussed which provide necessary smoothness of solution.

Колмогорцева Наталья Геннадьевна
Политехнический институт (филиал)
623400, Россия, г. Каменск-Уральский,
Свердловской обл.,ул. Ленина, 34А
E-mail: *nata_200468@mail.ru*

Пилюгин Андрей Владимирович
Политехнический институт (филиал)
623400, Россия, г. Каменск-Уральский,
Свердловской обл.,ул. Ленина, 34А
E-mail: pan@k-uralsk.ustu.ru