ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.926+517.977

© *А. А. Козлов*

ГЛОБАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ ИНВАРИАНТАМИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ [1]

Для двумерных линейных равномерно вполне управляемых систем с локально интегрируемыми коэффициентами получены достаточные условия глобальной управляемости показателей Ляпунова и глобальной ляпуновской приводимости. Для трехмерных систем приводится основная лемма, позволяющая перенести на них эти результаты.

Ключевые слова: равномерная полная управляемость, показатели Ляпунова.

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0 \tag{1}$$

с локально интегрируемыми по Лебегу матрицами коэффициентов A и B. Будем также считать, что эти матрицы обладают свойством интегральной ограниченности, то есть для всех $t \geqslant 0$ справедливы неравенства $\int\limits_t^{t+1} \|A(\tau)\|\, d\tau < +\infty$ и $\int\limits_t^{t+1} \|B(\tau)\|\, d\tau < +\infty$. Замкнем систему (1) при помощи линейной обратной связи $u = U(t)x$, в которой произвольная фиксированная $(m \times n)$-матрица U предполагается ограниченной и измеримой. Тогда получим замкнутую однородную систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

характеристическими показателями которой будут являться числа

$$\lambda_1(A + BU) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A + BU).$$

Задача глобального управления показателями Ляпунова состоит в построении для системы (1) такой обратной связи $u = U(t)x$, которая обеспечила бы равенства

$$\lambda_i(A + BU) = \mu_i, \quad i = \overline{1,n},$$

[1]Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Математические модели».

где $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$ — заранее фиксированные вещественные числа. Если же для любой наперед заданной системы

$$\dot{z} = C(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0 \tag{3}$$

с локально интегрируемой и интегрально ограниченной матрицей C найдется такое управление $u = U(t)x$, что система (2) с этим управлением будет асимптотически эквивалентна системе (3), то есть будет существовать преобразование Ляпунова, связывающее эти системы, то в этом случае говорят [1], что система (2) обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости. При этом заметим, что все ляпуновские инварианты наперед заданной системы (3) и системы (2) с управлением U будут совпадать. Поэтому свойство глобальной ляпуновской приводимости также называют [2] свойством глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов. Относящиеся сюда основные определения и результаты можно найти в работах [1–3]. Отметим, что все известные результаты получены только для случая системы (2) с кусочно равномерно непрерывной матрицей B.

Пусть $n = 2$ и $m \in \{1, 2\}$, тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если система* (1) *равномерно вполне управляема, то показатели Ляпунова замкнутой системы* (2) *глобально управляемы.*

Теорема 2. *Если* $A(t) \equiv 0$, $t \geqslant 0$ *и система* (1) *равномерно вполне управляема, то система* (2) *обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости.*

Обобщение теорем 1 и 2 для случая $n \geqslant 3$ пока не получено. Однако справедлив следующий трехмерный аналог ключевой леммы, использующейся в доказательстве этих теорем.

Пусть $X(t,s)$, $t, s \geqslant 0$ — матрица Коши системы (2) с нулевым управлением. Возьмем некоторое $\sigma > 0$. Зафиксируем произвольные $t_0 \geqslant 0$, $p \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ и разобьем отрезок $[t_0, t_0 + \sigma]$ точками t_i, $i = \overline{1, p-1}$ на p равных частей. Для любой измеримой и ограниченной функции $u(t)$, $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$ положим $w_i(t_0, u) := \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} X(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau$, $i = \overline{1, p}$. Имеет место

Лемма 1. *Пусть* $n = 3$ *и* $m \in \{1, 2, 3\}$. *Если система* (1) σ*-равномерно вполне управляема, то существуют такие* $\theta > 0$ *и* $\gamma > 0$, *что для любых* $t_0 \geqslant 0$, $0 < \varphi \leqslant \theta$ *и* $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$ *найдутся числа* $\theta_1 = \theta_1(\theta) > 0$ *и* $\ell = \ell(\gamma, \varphi) > 0$, *круговые конусы* $K_i \subset \mathbb{R}^3$, *величины углов раствора* *которых не превосходят* φ, *измеримые управления* $u_i(t)$, $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$ *и множества* $M_i \subset \{1, \ldots, p\}$, $i = \overline{1,3}$, *для которых выполняются соотношения* $\sphericalangle(K_i, K_j) \geqslant \theta_1$, $i, j = \overline{1,3}$, $i \neq j$, $\|u_i(t)\| \leqslant \gamma$, $t \in [t_0, t_0+\sigma]$, $i = \overline{1,3}$, $w_j(t_0, u_i) \in K_i$, $j \in M_i$, $i = \overline{1,3}$, *и* $\|\sum\limits_{j \in M_i} w_j(t_0, u_i)\| \geqslant \ell$.

Аналог леммы 1 в двумерном случае позволяет найти для системы (1) на произвольном фиксированном отрезке длины σ такие два измеримых, ограниченных векторных управления и соответствующих им два подмножества этого отрезка, что векторы, являющиеся решениями уравнения (1) с найденными управлениями, при одних и тех же начальных условиях в каждой точке указанных подмножеств образуют базис пространства $\mathbb{R}^2$. На основе этих управлений строится матричное управление для исходной задачи.

* * *

1. Tonkov E. L. Uniform attainability and Lyapunov reducibility of bilinear control system // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2000. Suppl. 1. P. S228–S253.
2. Макаров Е. К., Попова С. Н. О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 1. С. 97–106.
3. Попова С. Н. О глобальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 8. С. 1048 – 1054.

Поступила в редакцию 28.01.08

A. A. Kozlov

The global control over asymptotical invariants of linear systems in small dimensions

For two-dimensional linear uniformly controllable systems we study the properties of global controllability of Lyapunov exponents and global Lyapunov reducibility. For three–dimensional linear uniformly controllable systems we give the basic lemma providing the possibility to generalize the two-dimensional results for three-dimensional case.

Козлов Александр Александрович
Институт математики НАН Республики Беларусь
220072, Беларусь, г. Минск,
ул. Сурганова, 11
E-mail: kozlovaa@tut.by