ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.977.1 + 517.926

© *В. А. Зайцев*

ОБ УПРАВЛЕНИИ СПЕКТРОМ И СТАБИЛИЗАЦИИ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ [1]

Получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи управления спектром в билинейной системе.

Ключевые слова: управление спектром, стабилизация, билинейная система.

Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A_0 x + Bu, \quad y = C^* x, \quad (x, u, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k. \tag{1}$$

Пусть управление в системе (1) строится в виде линейной неполной обратной связи $u = Uy$. Соответствующая замкнутая система будет иметь вид

$$\dot{x} = (A_0 + BUC^*)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Наряду с системой (2), рассмотрим билинейную управляемую систему

$$\dot{x} = (A_0 + u_1 A_1 + \ldots + u_r A_r)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Всякую систему вида (2) можно записать в виде (3), если положить $r := mk$, $A_1 := b_1 c_1^*, \ldots, A_k := b_1 c_k^*$, $A_{k+1} := b_2 c_1^*, \ldots, A_{2k} := b_2 c_k^*, \ldots, A_{r-k+1} := b_m c_1^*, \ldots, A_r := b_m c_k^*$, $u := (u_{11}, \ldots, u_{1k}, u_{21}, \ldots, u_{2k}, \ldots, u_{m1}, \ldots, u_{mk})$, где $U = \{u_{ij}\}_{i=1,\ldots,m}^{j=1,\ldots,k}$.

Исследуется *задача управления спектром матрицы системы* (3) или, по-другому, *задача размещения собственных значений* (pole assignment problem). Будем говорить, что *задача управления спектром в системе* (3) *разрешима*, если для произвольного многочлена $p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ найдется постоянное управление $u = (u_1, \ldots, u_r) \in \mathbb{R}^r$ такое, что характеристический многочлен $\chi(A_0 + u_1 A_1 + \ldots + u_r A_r; \lambda)$ матрицы $A_0 + u_1 A_1 + \ldots + u_r A_r$ совпадает с $p(\lambda)$. Будем предполагать, что коэффициенты систем (2) и (3) имеют следующий вид:

$$A_0 = \left\| \begin{matrix} a_{11}^o & a_{12}^o & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21}^o & a_{22}^o & a_{23}^o & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1}^o & a_{n-1,2}^o & \ldots\ldots & & a_{n-1,n}^o \\ a_{n1}^o & a_{n2}^o & \ldots\ldots & & a_{nn}^o \end{matrix} \right\|,$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06–01–00258).

$$A_i = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a^i_{p1} & \dots & a^i_{pp} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^i_{n1} & \dots & a^i_{np} & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}, \quad i = \overline{1,r},$$

$$B = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ b_{p1} & \dots & b_{pm} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{Vmatrix}, \qquad C = \begin{Vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \dots & c_{pk} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix},$$

$a^o_{i,i+1} \neq 0$, $i = \overline{1, n-1}$; $a^o_{ij} = 0$, $j > i+1$; $p \in \{1, \dots, n\}$. При таких условиях в работах [1, 2] были получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи управления спектром в системе (2). Здесь этот результат обобщен на систему (3).

Пусть $\chi(A_0; \lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n$. По матрице $A_0 = \{a^o_{ij}\}^n_{i,j=1}$ построим матрицу $S_1 = \{s^1_{ij}\}^n_{i,j=1}$ $s^1_{11} := 1$; $s^1_{1j} := 0$, $j = \overline{2,n}$; $s^1_{ij} := a^o_{i-1,j}$, $i = \overline{2,n}$, $j = \overline{1,n}$. Далее для каждого $l = \overline{2,n}$ по матрице $S_{l-1} = \{s^{l-1}_{ij}\}^n_{i,j=1}$ построим матрицу $S_l = \{s^l_{ij}\}^n_{i,j=1}$ следующим образом: $s^l_{11} := 1$, $s^l_{1j} := s^l_{j1} := 0$, $j = \overline{2,n}$; $s^l_{ij} := s^{l-1}_{i-1,j-1}$, $i,j = \overline{2,n}$. Положим $S = S_n \cdot S_{n-1} \cdot \ldots \cdot S_1$. Все матрицы S_l и S нижние треугольные невырожденные. Пусть $J_1 = \{g_{ij}\}^n_{i,j=1}$; $g_{i,i+1} = 1$, $i = \overline{1, n-1}$; $g_{ij} = 0$, $j \neq i+1$; $J_k := J^k_1$; $J_0 := I$. Построим $G := \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i-1} J^*_{i-1}$; $\alpha_0 := 1$. Далее построим матрицы $H_i := S A_i S^{-1}$, $i = \overline{0,r}$. Тогда матрицы H_i, $i = \overline{1,r}$ имеют такой же вид, как и матрицы A_i, $i = \overline{1,r}$, а $H_0 = J_1 + e_n \cdot \xi$, где $e_n = \operatorname{col}(0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$, $\xi = (-\alpha_n, \dots, -\alpha_1) \in \mathbb{R}^{n*}$. Имеем $\chi(A_0 + u_1 A_1 + \ldots + u_r A_r; \lambda) = \chi(H_0 + u_1 H_1 + \ldots + u_r H_r; \lambda)$. Пусть $h^i_j \in \mathbb{R}^n$ — это j-й столбец матрицы H_i, $i = \overline{1,r}$. По $(n \times n)$-матрицам $H_i = [h^i_1, h^i_2, \dots, h^i_n]$, $i = \overline{1,r}$ построим $(n \times r)$-матрицы $P_1 = [h^1_1, \dots, h^r_1]$, $\dots$, $P_n = [h^1_n, \dots, h^r_n]$. Затем построим $(n \times r)$-матрицу $Q = J_0 G P_1 + J_1 G P_2 + \ldots + J_{n-1} G P_n$.

Теорема 1. *Пусть* $\chi(A_0 + u_1 A_1 + \ldots + u_r A_r; \lambda) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n$. *Тогда*

$$\gamma = \alpha - Qu, \tag{4}$$

где $\gamma = \operatorname{col}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\alpha = \operatorname{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $u = \operatorname{col}(u_1, \dots, u_r)$.

Для системы (2) теорема 1 формулируется следующим образом.

Теорема 2. *Пусть* $\chi(A_0 + BUC^*; \lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n$. *Тогда*

$$\gamma_i = \alpha_i - \operatorname{Tr} SBUC^* S^{-1} J_{i-1} G, \quad i = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Теорема 3. *Задача управления спектром в системе* (3) *разрешима тогда и только тогда, когда строки матрицы* Q *линейно независимы; при этом управление* u, *приводящее* $\chi(A_0 + u_1A_1 + \ldots + u_rA_r; \lambda)$ *к заданному многочлену* $p(\lambda)$ *с коэффициентами* γ_i, *находится из системы* (4). *Задача управления спектром в системе* (2) *разрешима тогда и только тогда, когда матрицы*

$$C^*S^{-1}J_0GSB,\ C^*S^{-1}J_1GSB,\ \ldots,\ C^*S^{-1}J_{n-1}GSB \tag{6}$$

линейно независимы; при этом управление U, *приводящее* $\chi(A_0+BUC^*; \lambda)$ *к заданному многочлену* $p(\lambda)$ *с коэффициентами* γ_i, *находится из системы* (5).

Следствие 1. *Если строки матрицы* Q *линейно независимы, то система* (3) *стабилизируема с помощью постоянного управления* $u \in \mathbb{R}^r$. *Если матрицы* (6) *линейно независимы, то система* (2) *стабилизируема с помощью постоянного матричного управления* U.

* * *

1. Zaitsev V. A. Modal control for linear systems with incomplete feedback // International Conference «Differential Equations and Related Topics» dedicated to the memory of I.G. Petrovskii. Moscow. Book of Abstracts. 2007. P. 345–346.

2. Зайцев В. А. Управление спектром в линейных системах с неполной обратной связью // Дифференциальные уравнения. 2008. (В печати).

Поступила в редакцию 26.01.08

V. A. Zaitsev

Pole assignment problem and stabilization in bilinear systems

The necessary and sufficient conditions have been obtained for pole assignment problem solvability in bilinear systems.

Зайцев Василий Александрович
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 4)
E-mail: verba@udm.ru