ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.929

© ***И. С. Загребина***

НЕРАВЕНСТВО ЛЯПУНОВА ВО ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ

Доказано неравенство Ляпунова для произвольной временной шкалы.

Ключевые слова: временная шкала, неравенство Ляпунова.

О п р е д е л е н и е 1 [1]. Замкнутое множество $T \subseteq \mathbb{R}$ называется *временной шкалой.*

О п р е д е л е н и е 2 [1]. Отображения $\sigma,\ \rho:\ T \to T$, определенные равенствами

$$\begin{aligned}&\sigma(t)=\inf\{s\in T,\ s>t\},\quad \sigma(\sup T)=\sup T,\\ &\rho(t)=\sup\{s\in T,\ s<t\},\quad \rho(\inf T)=\inf T,\end{aligned}$$

называются *операторами скачка.*

П р и м е р 1. Если $T=\mathbb{R}$, то $\sigma(t)=\rho(t)=t$. Если $T=\mathbb{Z}$, то $\sigma(t)=t+1,\ \rho(t)=t-1$.

О п р е д е л е н и е 3 [1]. Немаксимальный элемент $t\in T$ называется *изолированным справа* (rs), если $\sigma(t)>t$, и *плотным справа* (rd), если $\sigma(t)=t$. Неминимальный элемент называется *изолированным слева* (ls), если $\rho(t)<t$, и *плотным слева* (ld), если $\rho(t)=t$.

О п р е д е л е н и е 4 [1]. Отображение $g:T\to X$, где X— банахово пространство, называется *rd-непрерывным*, если
1) $g(t)$ непрерывно в каждой rd-точке $t\in T$,
2) в каждой ld-точке существует $\lim\limits_{s\to t-0} g(s)=g(t^-)$.

О п р е д е л е н и е 5 [1]. Отображение $u:T\to X$ называется *дифференцируемым в точке* $t\in T$, если существует $a\in X$ такое, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ и для всех $s\in T\cap O_\delta(t)$ выполнено $\|u(\sigma(t))-u(s)-a(\sigma(t)-s)\|\leqslant\varepsilon|\sigma(t)-s|$. Производная отображения u обозначается u^Δ.

П р и м е р 2. Если $T=\mathbb{R}$, то $u^\Delta(t)=u'(t)$. Если $T=\mathbb{Z}$, то $u^\Delta(t)=u(t+1)-u(t)$.

Определение 6 [1]. Пусть $f, g : T \to X$. Если f дифференцируема на T и $f^{\Delta} = g(t)$ для всех $t \in T$, то f называется *первообразной* g на T.

Известно [1], что если $g : T \to X$ rd-непрерывна, то g имеет первообразную $f : t \to \int\limits_r^t g(s)\,ds,\ r, t \in T$.

Пример 3. Если $T = \mathbb{Z}$, то $\int\limits_r^s g(t)\,dt = g(r) + g(r+1) + \ldots + g(s-1)$. Если T —дискретная временная шкала, то

$$\int_r^s g(t)\,dt = g(r)(\sigma(r) - r) + g(\sigma(r))(\sigma(\sigma(r)) - \sigma(r)) + \ldots + g(\rho(s))(s - \rho(s)).$$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) & = & a(t)x(\sigma(t)) + b(t)u(t), \\ u^{\Delta}(t) & = & -c(t)x(\sigma(t)) - a(t)u(t),\ t \in T. \end{cases} \tag{1}$$

Будем предполагать, что коэффициенты системы (1) $a(t), b(t), c(t)$ — вещественнозначные функции и $b(t) \geqslant 0$ при всех $t \in T$.

Теорема 1. *Пусть α, $\beta \in T$, $\alpha \leqslant \rho(\rho(\beta))$ и система (1) имеет решение (x, u) такое, что $x(\alpha) = x(\beta) = 0$ и $x \not\equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$. Тогда имеет место неравенство Ляпунова:*

$$\int_\alpha^{\rho(\beta)} |a(t)|\,dt + \left[\int_\alpha^\beta b(t)\,dt \int_\alpha^{\rho(\beta)} c_+(t)\,dt\right]^{1/2} \geqslant 2,$$

где $c_+(t) = \max\{c(t), 0\}$.

* * *

1. Lakshmikantham V., Vatsala A.S. Hybrid systems on time scales // Jour. of Comp. and Appl. Math. 2002. Vol. 141. P. 227–235.

Поступила в редакцию 13.02.08

I. S. Zagrebina
Lyapunov inequality for time scales

Lyapunov inequality for time scales is proved.

Загребина Ирина Сергеевна
ГОУВПО «Удмуртский
государственный университет»
425034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 4)
E-mail: imi@uni.udm.ru