УДК 517.988.6

© *Т. В. Жуковская*

ОБ ИМПУЛЬСНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ [1]

Получены условия непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений с запаздыванием от момента и величины импульсного воздействия. Исследование основано на общих утверждениях о разрешимости уравнений с вольтерровыми операторами и непрерывной зависимости их решений от параметров, полученных в работе [1].

Ключевые слова: импульсные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения с запаздыванием, непрерывная зависимость решений от параметров уравнений.

Пусть $L([a,b],\mathbb{R}^n)$ — пространство суммируемых функций $t \to y(t)$ из $[a,b]$ в $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|y\|_L = \displaystyle\int_a^b \big|y(s)\big|\,ds$; $AC([a,b],\mathbb{R}^n)$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, имеющих при почти всех t производную $\dot{x}\in L([a,b],\mathbb{R}^n)$, с нормой $\|x\|_{AC} = |x(a)| + \|\dot{x}\|_L$. Зафиксируем $T_0 \in (a,b)$ и обозначим $ACS([a,b],\mathbb{R}^n,T_0)$ — метрическое пространство функций, каждая из которых $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ может иметь разрыв не более чем в одной (любой) точке $T = T(x) \in (a,b)$, где непрерывна слева и имеет предел справа, в остальных точках дифференцируема, причем ее производная $\dot{x}\in L([a,b],\mathbb{R}^n)$. Обозначим $\mathbf{j}(x)$ величину скачка функции $x \in ACS([a,b],\mathbb{R}^n)$, то есть $\mathbf{j}(x) = x(T+0) - x(T)$. Метрику в $ACS([a,b],\mathbb{R}^n,T_0)$ определим равенством

$$\rho_{ACS}(x,u) = \|\dot{x}-\dot{u}\| + |x(a)-u(a)| + |T(x)-T(u)| + |\mathbf{j}(x)-\mathbf{j}(u)|.$$

В этой формуле считаем $\mathbf{j}(x) = 0$ и $T(x) = T_0$, если функция x непрерывна.

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), x(h(t))\big), \quad t\in[a,b],\\ x(t) = \varphi(t), \quad \text{если} \quad t\notin[a,b], \quad x(a)=\alpha,\\ T(x) = T, \quad x(T+0)-x(T) = \varphi(T, x^T).\end{gathered} \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 07-01-00305.

Здесь $x^T \in AC([a,T],\mathbb{R}^n)$ — сужение неизвестной функции x; функционал $\varphi(T,\cdot) : AC([a,T],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ ограничен и для любой последовательности элементов $x_i \in AC([a,b],\mathbb{R}^n)$, сходящейся к некоторому $x \in AC([a,b],\mathbb{R}^n)$, $\|x_i - x\|_{AC} \to 0$, и любой числовой последовательности $T_i \in [a,b]$ такой, что $|T_i - T_0| \to 0$, выполнено

$$|\varphi(T_i, x_i^{T_i}) - \varphi(T_0, x^{T_0})| \to 0.$$

Предполагается, что функция $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори: измерима по первому аргументу, непрерывна по совокупности второго и третьего аргументов, и для любого $r > 0$ существует такая функция $g_r \in L([a,b],\mathbb{R})$, что при всех $x, u \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих неравенствам $|x| \leqslant r$, $|u| \leqslant r$, при почти всех $t \in [a,b]$ выполнено неравенство $|f(t,x,u)| \leqslant g_r(t)$. Далее, предположим, что функция $\varphi : (-\infty, a) \to \mathbb{R}^n$ измерима и ограничена в существенном, функция $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ измерима, $h(t) \leqslant t$ при почти всех $t \in [a,b]$.

Определим измеримое множество $h^{-1}(T_0) = \{t\colon\, h(t) = T_0\}$ и вычислим его меру $\mu(h^{-1}(T_0))$. Обозначим $\mathcal{T}(\varepsilon) = \{\,t\colon\, h(t) > t - \varepsilon\,\}$, $\varepsilon > 0$.

Теорема 1. *Пусть* $\mu(h^{-1}(T_0)) = 0$ *и существуют такое положительное* ε *и такое* q, *что для любых* $x, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$ *при почти всех* $t \in \mathcal{T}(\varepsilon)$ *выполнено неравенство*

$$|f(t,x,u_1) - f(t,x,u_2)| \leqslant q|u_1 - u_2|,$$

а для любых $x_1, x_2, u \in \mathbb{R}^n$ *при почти всех* $t \in [a,b]$ — *неравенство*

$$|f(t,x_1,u) - f(t,x_2,u)| \leqslant q|x_1 - x_2|.$$

Далее, предположим, что существуют такие $\delta > 0$, $\tau > 0$, q_φ, *что для любого* $T \in (T_0-\delta, T_0+\delta)\bigcap[a,b]$ *и для всех* $x, u \in AC([a,b],\mathbb{R}^n)$, *если* $T < a + \tau$ *и* $x(a) = u(a) = \alpha$, *то имеет место неравенство*

$$|\varphi(T,x^T) - \varphi(T,u^T)| \leqslant q_\varphi \int_a^T |\dot{x}(s) - \dot{u}(s)|\, ds; \tag{2}$$

а если $0 < \varsigma < T - a < \varsigma + \tau$ *и* $x(t) = u(t)$ *при* $t \in [a,\varsigma]$, *то также имеет место неравенство* (2). *Тогда для любого* $T \in (T_0 - \delta, T_0 + \delta)\bigcap[a,b]$ *задача* (1) *имеет единственное глобальное решение* $w \in ACS([a,b],\mathbb{R}^n,T_0,\delta)$ *и любое локальное решение является сужением* w. *Далее, если*

$$T_i \in (T_0 - \delta, T_0 + \delta) \bigcap [a,b]$$

и $T_i \to T_0$, *то для соответствующих глобальных решений задачи выполнено* $\rho_{ACS}(w_i, w) \to 0$.

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

Доказательство теоремы 1 основано на общих утверждениях о разрешимости уравнений с вольтерровыми операторами и непрерывной зависимости их решений от параметров, полученных в работе [1].

* * *

1. Жуковский Е. С. Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра // Матем. сборник. 2006. Т. 197, № 10. С. 33–56.

Поступила в редакцию 15. 02. 08

T. V. Zhukovskaya

On impulse differential equations with delay

Conditions have been obtained for continuous dependence of solutions of differential equations with delay on the moment and quantity of impulse action. This investigation is based on statements about solvability of Volterra operator equations and the continuous dependence of its solutions on parameters obtained in paper [1].

Жуковская Татьяна Владимировна
Тамбовское высшее военное авиационное
инженерное училище радиоэлектроники
392000, Россия, г. Тамбов, 6
E-mail: zukovskys@mail.ru