ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.518.6

© *Л. И. Данилов*

О ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЯХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Приведен ряд утверждений о почти периодических по Степанову сечениях многозначных отображений.

Ключевые слова: почти периодические функции, сечения, многозначные отображения.

Пусть $(\mathcal{U},\rho)$ — полное метрическое пространство, $M(\mathbb{R},\mathcal{U})$ — множество сильно измеримых функций $f:\mathbb{R}\to\mathcal{U}$, $M_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$, где $p\geqslant 1$, — множество функций $f\in M(\mathbb{R},\mathcal{U})$, для которых

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\int_{\xi}^{\xi+1}\rho^p(f(t),x_0)\,dt<+\infty\,,\ x_0\in\mathcal{U}\,.$$

Определим метрики

$$D_p^{(\rho)}(f,g)=\left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\int_{\xi}^{\xi+1}\rho^p(f(t),g(t))\,dt\right)^{1/p},\ f,g\in M_p(\mathbb{R},\mathcal{U})\,,$$

$$D_\infty^{(\rho)}(f,g)=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}\,\rho(f(t),g(t))\,,\ f,g\in L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{U})\,.$$

Для функции $f\in L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{U})$ число $\tau\in\mathbb{R}$ называется $(\varepsilon,D_\infty^{(\rho)})$ *-почти периодом*, где $\varepsilon>0$, если $D_\infty^{(\rho)}(f(\cdot),f(\cdot+\tau))<\varepsilon$. Пусть $\mathcal{P}_\infty^{(\rho)}(\varepsilon;f)$ — множество $(\varepsilon,D_\infty^{(\rho)})$ -почти периодов функции $f\in L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{U})$. Аналогичным образом определяется множество $(\varepsilon,D_p^{(\rho)})$ *-почти периодов* функции

$$f\in M_p(\mathbb{R},\mathcal{U}):\quad \mathcal{P}_p^{(\rho)}(\varepsilon;f)=\{\tau\in\mathbb{R}:D_p^{(\rho)}(f(\cdot),f(\cdot+\tau))<\varepsilon\}.$$

Множество $T\subseteq\mathbb{R}$ *относительно плотно*, если существует число $a>0$ такое, что $[\xi,\xi+a]\cap T\neq\emptyset$ для всех $\xi\in\mathbb{R}$. Ограниченная непрерывная функция $f:\mathbb{R}\to\mathcal{U}$ принадлежит пространству $CAP(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *почти периодических* (п.п.) *по Бору* функций, если для любого $\varepsilon>0$ множество $(\varepsilon,D_\infty^{(\rho)})$ -почти периодов функции f относительно плотно. Функция

$f \in M_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $p \geqslant 1$, принадлежит пространству $S_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *п.п. по Степанову* функций *степени* p, если для любого $\varepsilon > 0$ относительно плотно множество $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\varepsilon; f)$.

На пространстве $\mathcal{U}$ определим также метрику $\rho'(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\}$, $x, y \in \mathcal{U}$. Пусть $S(\mathbb{R},\mathcal{U}) \doteq S_1(\mathbb{R},(\mathcal{U},\rho'))$ — пространство *п.п. по Степанову* функций $f : \mathbb{R} \to \mathcal{U}$ (степени 1) со значениями в метрическом пространстве $(\mathcal{U},\rho')$. Справедливы вложения

$$CAP\,(\mathbb{R},\mathcal{U}) \subseteq S_p(\mathbb{R},\mathcal{U}) \subseteq S_1(\mathbb{R},\mathcal{U}) \subseteq S(\mathbb{R},\mathcal{U}).$$

Для измеримого (по Лебегу) множества $T \subseteq \mathbb{R}$ обозначим

$$\varkappa(T) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \operatorname{meas}\,[\xi, \xi+1] \cap T,$$

где meas — мера Лебега на $\mathbb{R}$. Пусть $M_p'(\mathbb{R},\mathcal{U})$ — множество таких функций $f \in M_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех измеримых множеств $T \subseteq \mathbb{R}$, для которых $\varkappa(T) < \delta$, выполняется неравенство

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_{[\xi,\xi+1]\cap T} \rho^p(f(t), x_0)\,dt < \varepsilon\,.$$

Имеем $S_p(\mathbb{R},\mathcal{U}) = S(\mathbb{R},\mathcal{U}) \cap M_p'(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $p \geqslant 1$.

Последовательность $\{\tau_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ называется f*-возвращающей* для функции $f \in S(\mathbb{R},\mathcal{U})$, если $D_1^{(\rho')}(f(\cdot), f(\cdot+\tau_j)) \to 0$ при $j \to +\infty$. Для функций $f \in S(\mathbb{R},\mathcal{U})$ через $\operatorname{Mod} f$ обозначается модуль (группа по сложению) таких чисел $\lambda \in \mathbb{R}$, что $e^{i\lambda\tau_j} \to 1$ при $j \to +\infty$ (где $i^2 = -1$) для любой f-возвращающей последовательности $\{\tau_j\}$. Если $\mathcal{U} = (\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ — банахово пространство и $f \in S_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$, то $\operatorname{Mod} f$ совпадает с модулем частот функции f.

Пусть $(\mathrm{cl}_b\,\mathcal{U}, \mathrm{dist}_\rho)$ — метрическое пространство непустых замкнутых ограниченных подмножеств пространства $(\mathcal{U},\rho)$ с метрикой Хаусдорфа dist_ρ, $(\mathrm{cl}\,\mathcal{U}, \mathrm{dist}_{\rho'})$ — метрическое пространство непустых замкнутых подмножеств пространства $(\mathcal{U},\rho)$ с метрикой Хаусдорфа $\mathrm{dist}_{\rho'}$, соответствующей метрике ρ'. Обозначим через $\mathrm{cl}_c\,\mathcal{U} \subseteq (\mathrm{cl}_b\,\mathcal{U}, \mathrm{dist}_\rho)$ множество непустых компактных подмножеств пространства $(\mathcal{U},\rho)$. Пространства $CAP\,(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b\,\mathcal{U})$, $S_p(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b\,\mathcal{U})$, $p \geqslant 1$, и $S(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b\,\mathcal{U})$ *п.п. по Бору* и *п.п. по Степанову многозначных отображений* $F : \mathbb{R} \to \mathrm{cl}_b\,\mathcal{U}$ определяются как соответствующие пространства п.п. функций со значениями в метрическом пространстве $(\mathrm{cl}_b\,\mathcal{U}, \mathrm{dist}_\rho)$. Положим

$$S(\mathbb{R}, \mathrm{cl}\,\mathcal{U}) \doteq S_1(\mathbb{R}, (\mathrm{cl}\,\mathcal{U}, \mathrm{dist}_{\rho'})); \quad S(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b\,\mathcal{U}) \subseteq S(\mathbb{R}, \mathrm{cl}\,\mathcal{U}).$$

Пусть $S(\mathbb{R})$ — совокупность измеримых множеств $T \subseteq \mathbb{R}$ таких, что $\chi_T \in S_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (где χ_T — характеристическая функция множества T). Для множеств $T \in S(\mathbb{R})$ положим $\mathrm{Mod}\, T \doteq \mathrm{Mod}\chi_T$.

Через $\overline{X}$ обозначается замыкание множества $X \subseteq \mathcal{U}$. Множество $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{U}$ образует *ε-сеть* для множества $X \subseteq \mathcal{U}$, где $\varepsilon > 0$, если для каждого $x \in X$ найдется точка x_α такая, что $\rho(x, x_\alpha) < \varepsilon$.

Если $(\mathcal{U}, \rho)$ — компактное метрическое пространство, то

$$S(\mathbb{R},\mathcal{U}) = S_1(\mathbb{R},\mathcal{U}), \quad \mathrm{cl}\mathcal{U} = \mathrm{cl}_c\mathcal{U}, \quad S(\mathbb{R}, \mathrm{cl}\mathcal{U}) = S_1(\mathbb{R}, \mathrm{cl}\mathcal{U}).$$

Теорема 1 (см. [1]). *Пусть $(\mathcal{U}, \rho)$ — компактное метрическое пространство. Тогда многозначное отображение $F : \mathbb{R} \to \mathrm{cl}\mathcal{U}$ принадлежит пространству $S_1(\mathbb{R}, \mathrm{cl}\mathcal{U})$ в том и только том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют число $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ и функции $f_{\varepsilon,j} \in S_1(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $j = 1, \ldots, N_\varepsilon$, такие, что $f_{\varepsilon,j}(t) \in F(t)$ п.в. и при п.в. $t \in \mathbb{R}$ точки $f_{\varepsilon,j}(t)$, $j = 1, \ldots, N_\varepsilon$, образуют ε-сеть для множества $F(t)$. При этом для многозначного отображения $F \in S_1(\mathbb{R}, \mathrm{cl}\mathcal{U})$ функции $f_{\varepsilon,j}$ можно выбирать так, что $\mathrm{Mod}\, f_{\varepsilon,j} \subseteq \mathrm{Mod}\, F$.*

Теорема 2. *Пусть $(\mathcal{U}, \rho)$ — полное метрическое пространство. Тогда многозначное отображение $F : \mathbb{R} \to \mathrm{cl}\mathcal{U}$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_c\mathcal{U})$ в том и только том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся множество $T_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}$, число $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ и функции $f_{\varepsilon,j} \in S(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $j = 1, \ldots, N_\varepsilon$, такие, что $f_{\varepsilon,j}(t) \in F(t)$ п.в., $\varkappa(\mathbb{R} \setminus T_\varepsilon) < \varepsilon$ и при п.в. $t \in T_\varepsilon$ точки $f_{\varepsilon,j}(t)$, $j = 1, \ldots, N_\varepsilon$, образуют ε-сеть для множества $F(t)$. При этом для многозначного отображения $F \in S(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_c\mathcal{U})$ множества T_ε и функции $f_{\varepsilon,j}$ можно выбирать так, что $T_\varepsilon \in S(\mathbb{R})$, $\mathrm{Mod}\, T_\varepsilon \subseteq \mathrm{Mod}\, F$ и $\mathrm{Mod}\, f_{\varepsilon,j} \subseteq \mathrm{Mod}\, F$.*

Через $f(\cdot\,\big|_T)$ обозначается ограничение функции $f : \mathbb{R} \to \mathcal{U}$ на подмножество $T \subseteq \mathbb{R}$.

О п р е д е л е н и е 1. Семейство функций $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq M(\mathbb{R},\mathcal{U})$ называется *L^∞-псевдокомпактным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $T_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}$ такое, что $\varkappa(\mathbb{R} \setminus T_\varepsilon) < \varepsilon$ и $\{f_\alpha(\cdot\,\big|_{T_\varepsilon})\}_{\alpha\in A}$ — компактное множество в (полном) метрическом пространстве $L^\infty(T_\varepsilon, \mathcal{U})$.

В следующих двух теоремах, рассматривая компактные в $L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{U})$ (соответственно L^∞-псевдокомпактные) семейства функций $\{f_\alpha(.)\}_{\alpha \in A}$, будем считать, что все функции $f_\alpha(.)$, $\alpha \in A$ определены на одном измеримом множестве $T \subseteq \mathbb{R}$, для которого $\mathrm{meas}\, \mathbb{R} \setminus T = 0$, и $\rho(f_\alpha(t), f_\beta(t)) \leqslant$

$D_\infty^{(\rho)}(f_\alpha, f_\beta)$ для всех $\alpha, \beta \in A$ и $t \in T$ (соответственно

$$\rho(f_\alpha(t), f_\beta(t)) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\xi \in T_{\varepsilon_j}} \rho(f_\alpha(\xi), f_\beta(\xi))$$

для всех $\alpha, \beta \in A$ и $t \in T \cap T_{\varepsilon_j}$, $j \in \mathbb{N}$, где T_{ε_j} — множества из определения 1 и $\varepsilon_j \to 0$ при $j \to +\infty$). Мы всегда можем этого добиться, изменяя каждую функцию $f_\alpha(.)$ на некотором множестве нулевой меры.

Теорема 3. *Пусть* $(\mathcal{U}, \rho)$ *— компактное метрическое пространство. Тогда многозначное отображение* $F : \mathbb{R} \to \mathrm{cl}\,\mathcal{U}$ *принадлежит пространству* $S_1(\mathbb{R}, \mathrm{cl}\,\mathcal{U})$ *в том и только том случае, когда*

$$F(t) = \bigcup_{\alpha \in A} f_\alpha(t)$$

п.в. для некоторого компактного в $(L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{U}), D_\infty^{(\rho)})$ *семейства функций* $f_\alpha(.) \in S_1(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, $\alpha \in A$. *При этом для многозначного отображения* $F \in S_1(\mathbb{R}, \mathrm{cl}\,\mathcal{U})$ *функции* f_α *можно выбирать так, что* $\mathrm{Mod}\, f_\alpha \subseteq \mathrm{Mod}\, F$.

Теорема 4. *Пусть* $(\mathcal{U}, \rho)$ *— полное метрическое пространство. Тогда многозначное отображение* $F : \mathbb{R} \to \mathrm{cl}\,\mathcal{U}$ *принадлежит пространству* $S(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_c\,\mathcal{U})$ *в том и только том случае, когда*

$$F(t) = \bigcup_{\alpha \in A} f_\alpha(t)$$

п.в. для некоторого L^∞*-псевдокомпактного семейства функций* $f_\alpha(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, $\alpha \in A$. *При этом для многозначного отображения* $F \in S(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_c\,\mathcal{U})$ *функции* f_α *и множества* T_ε *из определения 1 можно выбирать так, что*

$$\mathrm{Mod}\, f_\alpha \subseteq \mathrm{Mod}\, F, \quad T_\varepsilon \in S(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Mod}\, T_\varepsilon \subseteq \mathrm{Mod}\, F.$$

З а м е ч а н и е 1. Теоремы 2, 3 и 4 доказываются с помощью результатов и методов работы [1]. Теоремы 1 и 3 справедливы также для п.п. по Вейлю и п.п. по Безиковичу многозначных отображений и функций (см. [2, 3]).

Теорема 5 (см. [4]). *Пусть* $(\mathcal{H}, \|.\|)$ *— банахово пространство,* $f \in S(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют множество* $T_\varepsilon \in S(\mathbb{R})$ *и функция* $\mathcal{F}_\varepsilon \in CAP\,(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ *такие, что*

$$\varkappa(\mathbb{R} \setminus T_\varepsilon) < \varepsilon, \quad \mathrm{Mod}\, T_\varepsilon \subseteq \mathrm{Mod}\, f, \quad \mathrm{Mod}\, \mathcal{F}_\varepsilon \subseteq \mathrm{Mod}\, f$$

и $f(t) = \mathcal{F}_\varepsilon(t)$ *при всех* $t \in T_\varepsilon$. *Если функция* f *не является п.в. постоянной, то можно считать, что* T_ε *— замкнутые множества.*

Теорема 5 является почти периодическим вариантом теоремы Лузина. Она также переносится на относительные компакты Бора [5]. При доказательстве следующей теоремы используются теоремы 4 и 5.

Теорема 6. *Пусть* $(\mathcal{H}, \|.\|)$ — *банахово пространство,* $F \in S(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_c\,\mathcal{H})$. *Тогда для всех* $j \in \mathbb{N}$ *найдутся компактные в* $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ *семейства функций* $\{f_{\alpha,j}\}_{\alpha \in A} \subseteq CAP\,(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ (*с одним индексным множеством* A) *и множества* $T_j \in S(\mathbb{R})$ *такие, что*

1) $\mathrm{Mod}\, f_{\alpha,j} \subseteq \mathrm{Mod}\, F$;
2) $T_j \subseteq T_{j+1}$, $\varkappa(\mathbb{R} \setminus T_j) < 2^{-j}$ *и* $\mathrm{Mod}\, T_j \subseteq \mathrm{Mod}\, F$;
3) $f_{\alpha,j+1}(t) = f_{\alpha,j}(t)$ *при всех* $t \in T_j$ (*и всех* $\alpha \in A$);
4) $F(t) = \bigcup_{\alpha \in A} f_{\alpha,j}(t)$ *при всех* $t \in T_j$.

Если многозначное отображение F *не является п.в. постоянным, то можно считать, что* T_j — *замкнутые множества.*

З а м е ч а н и е 2. В условиях теоремы 6 имеем

$$F_j(\cdot) \doteq \bigcup_{\alpha \in A} f_{\alpha,j}(\cdot) \in CAP\,(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_c\,\mathcal{H}).$$

При этом для любых $\varepsilon > 0$ и $j \in \mathbb{N}$ существует такое число $\delta > 0$, что

$$\mathcal{P}_1^{(\mathrm{dist}_{\rho'})}(\delta; F) \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{P}_\infty^{(\rho)}(\varepsilon; f_{\alpha,j}) \subseteq \mathcal{P}_\infty^{(\mathrm{dist}_\rho)}(\varepsilon; F_j)\,.$$

З а м е ч а н и е 3. В отличие от многозначных отображений

$$F_j \in CAP\,(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_c\,\mathcal{H})$$

многозначное отображение F, даже если оно принадлежит пространству $CAP\,(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_c\,\mathcal{H})$, может не иметь п.п. по Бору сечений (см., например, [6] или [7]).

Для полного сепарабельного метрического пространства $(\mathcal{U}, \rho)$ обозначим через $(\mathcal{M}(\mathcal{U}), d)$ (полное сепарабельное) метрическое пространство вероятностных борелевских мер $\mu[\cdot]$, определенных на σ-алгебре борелевских подмножеств метрического пространства $(\mathcal{U}, \rho)$ с метрикой Леви — Прохорова d. Пусть $\mathrm{supp}\,\mu$ — носитель меры $\mu[.] \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$, $\delta_x[.]$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке $x \in \mathcal{U}$, $S_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathcal{U}))$ — пространство *п.п. по Степанову* (степени 1) *мерозначных функций*

$$\mathbb{R} \ni t \to \mu[.;t] \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$$

со значениями в метрическом пространстве $(\mathcal{M}(\mathcal{U}), d)$.

В предыдущих теоремах была дана характеризация многозначных п.п. по Степанову отображений $F:\mathbb{R}\to \mathrm{cl}_c\mathcal{U}$ с помощью свойств их п.п. сечений. В следующей теореме приводится характеризация многозначных отображений $F:\mathbb{R}\to \mathrm{cl}\mathcal{U}$, которые получаются с помощью представления Кастена из счетного семейства п.п. по Степанову функций.

Теорема 7 (см. [8]). *Пусть $(\mathcal{U},\rho)$ — полное сепарабельное метрическое пространство. Тогда многозначное отображение $F:\mathbb{R}\to \mathrm{cl}\mathcal{U}$ представимо в виде*

$$F(t)=\overline{\bigcup_j f_j(t)}$$

п.в., где $f_j\in S(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $j\in\mathbb{N}$, тогда и только тогда, когда $F(t)=\operatorname{supp}\mu[.;t]$ п.в. для некоторой мерозначной функции $\mu[.;.]\in S_1(\mathbb{R},\mathcal{M}(\mathcal{U}))$. При этом для мерозначной функции $\mu[.;.]$ можно выбирать функции f_j так, что $\operatorname{Mod} f_j\subseteq \operatorname{Mod}\mu[.;.]$.

Если $\mu\in S_1(\mathbb{R},\mathcal{M}(\mathcal{U}))$, то не всегда $\operatorname{supp}\mu[.;.]\in S(\mathbb{R},\mathrm{cl}\mathcal{U})$ [9].

Теорема 7 справедлива также для п.п. по Вейлю (см. [10]) и п.п. по Безиковичу мерозначных функций $\mu[.;.]$ и сечений f_j. Следующая теорема усиливает теорему 7.

Теорема 8 (см. [8]). *Пусть $(\mathcal{U},\rho)$ — полное сепарабельное метрическое пространство, $\mu[.;.]\in S_1(\mathbb{R},\mathcal{M}(\mathcal{U}))$. Тогда существуют множества $T_j\in S(\mathbb{R})$, $j\in\mathbb{N}$, и функции $f_k\in S(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $k\in\mathbb{N}$, такие, что*

$$T_j\subseteq T_{j+1}\,,\quad \operatorname{Mod}T_j\subseteq \operatorname{Mod}\mu[.;.],\quad \varkappa(\mathbb{R}\setminus T_j)\to 0 \text{ при } j\to+\infty,$$

$$\operatorname{Mod} f_k\subseteq \operatorname{Mod}\mu[.;.],\quad f_k(t)\in \operatorname{supp}\mu[.;t] \text{ п.в.}$$

и для всех $j\in\mathbb{N}$

$$\lim_{N\to+\infty}\ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in T_j} d\Big(\mu[.;.t]\,,\ \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\delta_{f_k(t)}[.]\Big)=0\,.$$

Если мерозначная функция $\mu[.;.]$ не является п.в. постоянной, то множества T_j можно выбирать замкнутыми.

Пусть $(\mathcal{U},\rho)$ — полное сепарабельное метрическое пространство. Для множества $X\in \mathrm{cl}\mathcal{U}$ обозначим через $\mathcal{M}_X$ замкнутое выпуклое множество мер $\mu[.]\in\mathcal{M}(\mathcal{U})$, для которых $\operatorname{supp}\mu\subseteq X$. Если $X,Y\in\mathrm{cl}\mathcal{U}$, то $\mathrm{dist}_d(\mathcal{M}_X,\mathcal{M}_Y)=\mathrm{dist}_{\rho'}(X,Y)$.

Теорема 7 позволяет «овыпуклить» задачу о существовании п.п. по Степанову сечений многозначных отображений $F:\mathbb{R}\to\mathrm{cl}\mathcal{U}$. Следующая теорема (которая справедлива также для п.п. по Вейлю и п.п. по Безиковичу функций) является непосредственным следствием теоремы 7.

Теорема 9. *Пусть* $(\mathcal{U},\rho)$ *— полное сепарабельное метрическое пространство. Тогда многозначное отображение* $F:\mathbb{R}\to \mathrm{cl}\,\mathcal{U}$ *имеет п.п. по Степанову сечение* $f\in S(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *тогда и только тогда, когда существует п.п. по Степанову сечение* $\mu[.;.]\in S_1(\mathbb{R},\mathcal{M}(\mathcal{U}))$ *у многозначного отображения* $\mathbb{R}\ni t\to \mathcal{M}_{F(t)}\subseteq(\mathcal{M}(\mathcal{U}),d)$.

Следствие 1. *Пусть* $(\mathcal{U},\rho)$ *— полное сепарабельное метрическое пространство,* $F\in S(\mathbb{R},\mathrm{cl}\,\mathcal{U})$. *Тогда существует функция* $f\in S(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *такая, что* $f(t)\in F(t)$ *п.в. и* $\mathrm{Mod}\,f\subseteq \mathrm{Mod}\,F$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ можно вложить (с сохранением выпуклых комбинаций) в некоторое банахово пространство $(\mathcal{H},\|.\|)$, норма которого определяет на замкнутом выпуклом множестве $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ метрику, эквивалентную метрике Леви–Прохорова d (см., например, работу [11], в которой рассматривались п.п. по Степанову мерозначные функции со значениями в пространстве знакопеременных мер). Поэтому в силу теоремы Майкла (и выпуклости множеств $\mathcal{M}_X$) существует непрерывная функция

$$(\mathrm{cl}\,\mathcal{U},\mathrm{dist}_{\rho'})\ni X\to \mathfrak{X}(X)\in\mathcal{M}_X\subseteq(\mathcal{M}(\mathcal{U}),d).$$

Так как пространство $(\mathrm{cl}\,\mathcal{U},\mathrm{dist}_{\rho'})$ полное и $F\in S(\mathbb{R},\mathrm{cl}\,\mathcal{U})$, то для композиции $\mathfrak{X}(F(.))$ имеем

$$\mathfrak{X}(F(\cdot))\in S_1(\mathbb{R},\mathcal{M}(\mathcal{U})),\quad \mathrm{Mod}\,\mathfrak{X}(F(\cdot))\subseteq\mathrm{Mod}\,F(\cdot)$$

(см. [7]) и $\mathrm{supp}\,\mathfrak{X}(F(t))\subseteq F(t)$ п.в. Теперь применение теоремы 9 (или теоремы 7) завершает доказательство следствия 1. □

Утверждение следствия 1 было первоначально доказано в [12] на основе результатов Фришковского [13]. Другое доказательство, использующее равномерную аппроксимацию п.п. по Степанову функций элементарными (принимающими не более чем счетное множество значений) п.п. по Степанову функциями, приведено в [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данилов Л. И. О почти периодических многозначных отображениях // Матем. заметки. 2000. Т. 68, № 1. С. 82–90.
2. Данилов Л. И. О почти периодических по Вейлю сечениях многозначных отображений / УдГУ. Ижевск, 2004. 104 с. Деп. в ВИНИТИ 09.06.2004, № 981-В2004.
3. Данилов Л. И. О почти периодических по Безиковичу сечениях многозначных отображений // Вестн. Удм. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. Ижевск, 2008. № 1. С. 97–120.

4. Данилов Л. И. О равномерной аппроксимации почти периодических по Степанову функций // Изв. вузов. Математика. 1998. № 1. С. 10–18.
5. Данилов Л. И. Равномерная аппроксимация почти периодических по Степанову функций // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2004. Вып. 1 (29). С. 33–48.
6. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Лин В. Я., Локуциевский О. О. О топологических причинах аномального поведения некоторых почти периодических систем // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Киев: Наук. думка, 1977. С. 54–61.
7. Данилов Л. И. Почти периодические сечения многозначных отображений // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 1993. Вып. 1. С. 16–78.
8. Данилов Л. И. Мерозначные почти периодические функции и почти периодические сечения многозначных отображений // Матем. сб. 1997. Т. 188, № 10. С. 3–24.
9. Данилов Л. И., Иванов А. Г. К теореме о поточечном максимуме в почти периодическом случае // Изв. вузов. Математика. 1994. № 6. С. 50–59.
10. Данилов Л. И. Почти периодические по Вейлю сечения носителей мерозначных функций // Сиб. электр. матем. известия. 2006. Т. 3. С. 384–392.
11. Данилов Л. И. О почти периодических мерозначных функциях // Матем. сб. 2000. Т. 191, № 12. С. 27–50.
12. Долбилов А. М., Шнейберг И. Я. Почти периодические многозначные отображения и их сечения // Сиб. матем. журн. 1991. Т. 32, № 2. С. 172–175.
13. Fryszkowski A. Continuous selections for a class of non-convex multivalued maps // Studia Math. 1983. Vol. 76, № 2. P. 163–174.

Поступила в редакцию 15.02.08

L. I. Danilov

On almost periodic sections of multivalued maps

A number of assertions is given of Stepanov almost periodic sections of multivalued maps.

Данилов Леонид Иванович
Физико-технический институт
УрО РАН
426000, Россия, г. Ижевск,
ул. Кирова, 132
E-mail: danilov@otf.pti.udm.ru