ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.96

© *В. М. Гилязев, М. М. Кипнис*

УСТОЙЧИВОСТЬ И ВЫПУКЛОСТЬ: ОТ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ДО РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Показано, что выпуклость последовательности коэффициентов способствует устойчивости разностных уравнений и дифференциальных уравнений с запаздываниями.

Ключевые слова: выпуклость, разностное уравнение, устойчивость.

Известен следующий результат [1, theorem 1.2.20].

Теорема 1. *Если $a(\tau)$ дважды дифференцируема, монотонно убывает, выпукла на $[0;\infty)$, интеграл $\int\limits_0^\infty a(\tau)\,d\tau$ сходится и $a(\tau) \not\equiv 0$, то нулевое решение интегро-дифференциального уравнения*

$$\frac{dx}{dt} + \int_0^\infty a(\tau)x(t-\tau)\,d\tau = 0, \quad t \geqslant 0 \tag{1}$$

асимптотически устойчиво.

Положим $\Delta a_m = a_{m+1} - a_m$, $\Delta^2 a_m = a_m - 2a_{m+1} + a_{m+2}$. Последовательность $(a_m)_{m=1}^k$ назовем *выпуклой*, если $\Delta^2 a_m \geqslant 0$ при $1 \leqslant m \leqslant k-2$ и $a_{k-1} \geqslant 2a_k > 0$.

Теорема 2. *Если $\Delta^2 a_0 > 0$, $\Delta^2 a_m \geqslant 0$ при $1 \leqslant m \leqslant k-2$ и $a_{k-1} \geqslant 2a_k > 0$, то уравнение*

$$\frac{dx}{dt} + \frac{a_0}{2}x(t) + \sum_{m=1}^{k} a_m x(t-m\tau) = 0, \quad t \geqslant 0 \tag{2}$$

асимптотически устойчиво при любом $\tau \geqslant 0$.

Теорема 2 улучшает результат работы [2], в которой при тех же условиях утверждалась устойчивость уравнения $\frac{dx}{dt} + a_0 x(t) + \sum\limits_{m=1}^{k} a_m x(t-m\tau) = 0$.

Теорема 3. *Пусть* $\Delta^2 a_m \geqslant 0$ *при* $1 \leqslant m \leqslant k-2$ *и* $a_{k-1} \geqslant 2a_k > 0$. *Тогда:* 1) *уравнение*

$$x_n + \sum_{m=1}^{k} a_m x_{n-m} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

асимптотически устойчиво, если и только если $1 + \sum\limits_{m=1}^{k} (-1)^m a_m > 0$.

2) *если* $1 + \sum\limits_{m=1}^{k} (-1)^m a_m < 0$, *то уравнение* (2) *неустойчиво.*

З а м е ч а н и е 1. В условиях теоремы 3 для асимптотической устойчивости необходимо, чтобы $a_1 < 2$. В недавних работах [3, 4] даны достаточные условия устойчивости, работающие при более стеснительном ограничении $\sum\limits_{m=1}^{k} a_m < 2$.

З а м е ч а н и е 2. По признаку Энестрёма–Какейи уравнение (3) устойчиво, если $1 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_k > 0$. Теорема 3 ослабляет неравенство $a_1 \leqslant 1$ до $a_1 < 2$, зато требует дополнительно выпуклость последовательности (a_m).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gopalsamy K. Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. N.Y.: Kluwer Academic, 1992.
2. Vaguina M. Yu. Linear stability of the delay logistic equation // Appl. Math. Lett. 2004. Vol. 17. P. 1069–1072.
3. Tang X. H., Jiang Z. Asymptotic behavior of Volterra difference equations // J. Difference Equ. Appl. 2007. Vol. 13, № 1. P. 25–40.
4. Kipnis M. M., Komissarova D. A. A note on explicit stability conditions for autonomous higher order difference equations // J. Difference Equ. Appl. 2007. Vol. 13, № 5. P. 457–461.

Поступила в редакцию 09.02.08

V. M. Gilyazev, M. M. Kipnis

Stability and convexity: from integro–differential to difference equations

It is shown that the convexity of the sequence of coefficients with some conditions makes for the stability of difference equations and differential equations with delay.

Гилязев Виталий Маратович
Челябинский государственный
педагогический университет
454080, Россия, г. Челябинск,
пр. Ленина, 69
E-mail: pedagog111@yandex.ru

Кипнис Михаил Маркович
Челябинский государственный
педагогический университет
454080, Россия, г. Челябинск,
пр. Ленина, 69
E-mail: kipnis@mail.ru