УДК 517.911/517.929

© *Е. О. Бурлаков, Е. С. Жуковский*

О КОРРЕКТНОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ [1]

Получены условия непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от функций управления и запаздывания. При выполнении этих условий можно гарантировать, что неточности в определении параметров не могут оказать большого влияния на управляемую систему.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с запаздыванием, непрерывная зависимость решений от параметров, управляемые системы.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — пространство векторов, имеющих n действительных компонент, с нормой $|\cdot|$; μ — мера Лебега на отрезке $[a,b]$; $L([a,b],\mu,\mathbb{R}^n)$ — пространство измеримых суммируемых функций $y:\ [a,b]\to\ \mathbb{R}^n$ с нормой $\|y\|_L=\displaystyle\int_a^b|y(s)|\,ds$; $AC([a,b],\mu,\mathbb{R}^n)$ — пространство таких абсолютно непрерывных функций $x:\ [a,b]\to\ \mathbb{R}^n$, что $\dot{x}\in L([a,b],\mu,\mathbb{R}^n)$, с нормой $\|x\|_{AC}=|x(a)|+\|\dot{x}\|_L$.

Рассмотрим задачи Коши

$$\begin{gathered}\dot{x}(t)=f\big(t,x(t-\tau_1(t)),x(t-\tau_2(t)),\ldots,x(t-\tau_m(t)),u(t)\big),\ t\in[a,b],\\ x(t)=\varphi(t),\quad\text{если}\quad t\notin[a,b],\quad x(a)=\alpha;\end{gathered}\tag{1}$$

$$\begin{gathered}\dot{x}(t)=f\big(t,x(t-\tau_{1i}(t)),x(t-\tau_{2i}(t)),\ldots,x(t-\tau_{mi}(t)),u_i(t)\big),\ t\in[a,b],\\ x(t)=\varphi(t),\quad\text{если}\quad t\notin[a,b],\quad x(a)=\alpha,\quad i=1,2,\ldots,\end{gathered}\tag{1i}$$

где функции $\tau_j,\tau_{ji}:[a,b]\to[0,+\infty)$, $j=1,2,\ldots,m$, $i=1,2,\ldots$ измеримы, функции $u,u_i:[a,b]\to\mathbb{R}^k$, $i=1,2,\ldots$ измеримы и ограничены в существенном, функция $\varphi:(-\infty,a)\to\mathbb{R}^n$ равномерно непрерывна и ограничена, функция $m+2$ аргументов $f:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\ldots\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори:

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 07-01-00305), Рособразования (темплан 1.6.07), Норвежской национальной программы научных исследований FUGE при Совете научных исследований Норвегии и Норвежского комитета по развитию университетской науки и образования (NUFU), грант PRO 06/02.

k_1) функция $f(\cdot, x_1, x_2, \ldots, x_m, u)$ измерима при любых $x_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $u \in \mathbb{R}^k$;

k_2) функция $f(t, \cdot, \cdot, \ldots, \cdot)$ непрерывна при почти всех $t \in [a, b]$;

k_3) для любого числа $r > 0$, существует такая суммируемая функция $g_r \in L([a, b], \mu, \mathbb{R})$, что для всех $u \in \mathbb{R}^k$, $x_j \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих неравенствам $|u| \leqslant r$, $|x_j| \leqslant r$, $j = 1, 2, \ldots, m$, почти всюду на $[a, b]$ выполнено неравенство $|f(t, x_1, x_2, \ldots, x_m, u)| \leqslant g_r(t)$.

Определение 1. Пусть $\gamma, \beta \in (0, b - a)$. *Локальным решением* задачи (1) или ($1i$), определенным на $[a, a + \gamma]$, будем считать функцию $z_\gamma \in AC([a, a + \gamma], \mu, \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую соответствующему уравнению при почти всех $t \in [a, a + \gamma]$ и начальному условию. *Предельно продолженным решением* задачи (1) или ($1i$), определенным на $[a, a + \beta)$, будем считать функцию $z_\beta \in AC([a, a + \beta), \mu, \mathbb{R}^n)$, сужение которой z_ζ на $[a, a + \zeta]$ при любом $\zeta \in (0, \beta)$ является локальным решением соответствующей задачи и $\lim\limits_{\zeta \to \beta - 0} \int_a^{a+\zeta} |\dot{z}_\zeta(s)| \, ds = \infty$. *Глобальным решением* задачи (1) или ($1i$) назовем функцию $z \in AC([a, b], \mu, \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую соответствующему уравнению при почти всех $t \in [a, b]$ и начальному условию.

Определим множества

$$M_i = \bigcup_{j=1}^{m} \big\{ t \in [a, b] \, : \, t - \tau_j(t) = a, \ t - \tau_{ji}(t) < a \big\}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Теорема 1. *Пусть последовательности функций τ_i, u_i сходятся по мере к функциям τ, и соответственно, пусть также либо $\mu(M_i) \to 0$ при $i \to \infty$, либо $\alpha = \varphi(a - 0)$. Тогда:*

— задачи (1), ($1i$), $i = 1, 2, \ldots$ локально разрешимы, всякое локальное решение продолжаемо до глобального или предельно продолженного решения;

— область определения любого предельно продолженного решения имеет меру, большую некоторого θ, $\theta > 0$;

— если для некоторого $\gamma > 0$ при каждом i произвольно выбрать определенное на $[a, a + \gamma]$ локальное решение $z_{i\,\gamma}$ задачи ($1i$), то полученная последовательность будет компактна в $AC([a, a+\gamma], \mu, \mathbb{R}^n)$ и все ее предельные точки будут локальными решениями задачи (1);

— если определенное на $[a, a+\gamma]$ локальное решение z_γ задачи (1) единственно, то для любой последовательности определенных на $[a, a + \gamma]$ локальных решений $z_{i\,\gamma}$ задач ($1i$) имеет место $\int_a^{a+\gamma} |z_\gamma(t) - z_{i\,\gamma}(t)| dt \to 0$.

Доказательство теоремы опирается на результаты работы [1].

* * *

1. Жуковский Е. С. Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра // Матем. сб. М., 2006. Т.197, № 10. С. 33–56.

Поступила в редакцию 15. 02. 08

E. O. Burlakov, E. S. Zhukovskiy
On the correctness of controllable systems with delay

Conditions have been obtained for continuous dependence of solutions of differential equations on control and delay functions. These conditions guarantee that controllable system will not be strongly influenced by inaccurateness in parameters determination.

Бурлаков Евгений Олегович
Тамбовский государственный
университет
392000, Россия, г. Тамбов,
ул. Интернациональная, 33
E-mail: aib@tsu.tmb.ru

Жуковский Евгений Семенович
Тамбовский государственный
университет
392000, Россия, г. Тамбов,
ул. Интернациональная, 33
E-mail: zukovskys@mail.ru