ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.911.5

© *А. И. Булгаков, А. И. Коробко, О. В. Филиппова*

К ТЕОРИИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ [1]

Рассматриваются функционально-дифференциальные включения с вольтерровым по А. Н. Тихонову многозначным отображением и импульсными воздействиями. Сформулированы теоремы о продолжаемости решений и установлена связь априорной ограниченности решений с глобальной разрешимостью системы.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные включения, вольтерровость по А. Н. Тихонову, априорная ограниченность, выпуклость по переключению, разложимость.

Данная работа посвящена вопросу о продолжаемости решений задачи Коши для функционально-дифференциального включения с вольтерровым по А. Н. Тихонову многозначным отображением и импульсными воздействиями. Отметим, что дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями исследовались в монографиях [1, 2].

Пусть $\mathcal{U} \subset [a, b]$ — измеримое по Лебегу множество. Обозначим через $L^n(\mathcal{U})$ пространство суммируемых по Лебегу функций $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{L^n(\mathcal{U})} = \displaystyle\int_{\mathcal{U}} |x(s)|ds$. Если $\Phi \subset L^n[a, b]$, то будем говорить, что множество Φ *выпукло по переключению* (*разложимо*), если для любых $x, y \in \Phi$ и любого измеримого множества $e \subset [a, b]$ выполнено включение $\chi_{(e)}x+\chi_{([a,b]\setminus e)}y \in \Phi$, где $\chi_{(\cdot)}$ — характеристическая функция. Множество всех ограниченных замкнутых выпуклых по переключению подмножеств пространства $L^n[a, b]$ обозначим через $S(L^n[a, b])$.

Пусть, далее, t_k — конечный набор точек, удовлетворяющих неравенствам $a < t_1 < \ldots < t_m < b$. Обозначим через $\widetilde{C}^n[a, b]$ множество всех непрерывных на каждом из интервалов $[a, t_1]$, $(t_1, t_2]$, $\ldots$, $(t_m, b]$ ограниченных функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k = 1, 2, \ldots, m$. Норму в $\widetilde{C}^n[a, b]$ определим равенством $\|x\|_{\widetilde{C}^n[a,b]} = \sup\{|x(t)|\colon t \in [a, b]\}$. Далее, если $\tau \in (a, b]$, то про-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 07–01–00305), Рособразования (темплан 1.6.07), Норвежской национальной программы научных исследований FUGE и Норвежского комитета по развитию университетской науки и образования (NUFU), грант PRO 06/02.

странство функций, являющихся сужением на отрезок $[a,\tau]$ элементов из $\widetilde{C}^n[a,b]$, обозначим $\widetilde{C}^n[a,\tau]$ и определим норму в $\widetilde{C}^n[a,\tau]$ равенством $\|x\|_{\widetilde{C}^n[a,\tau]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a,\tau]\}$.

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} \in \Phi(x), \tag{1}$$

$$\Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)),\ k = 1,\dots,m, \tag{2}$$

$$x(a) = x_0, \tag{3}$$

где *полунепрерывное снизу* отображение $\Phi : \widetilde{C}^n[a,b] \to S(L^n[a,b])$ удовлетворяет условию: для каждого ограниченного множества $U \subset \widetilde{C}^n[a,b]$ образ $\Phi(U)$ ограничен суммируемой функцией. Отображения $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывны, $\Delta x(t_k) = x(t_k+0) - x(t_k)$, моменты времени t_k заданы.

О п р е д е л е н и е 1. Под *решением задачи* (1)–(3) будем понимать функцию $x \in \widetilde{C}^n[a,b]$, для которой существует такое $q \in \Phi(x)$, что

$$x(t) = x_0 + \int_a^t q(s)ds + \sum_{k=1}^{m} \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta x(t_k),$$

где $\Delta x(t_k)$ удовлетворяют равенствам (2).

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить [3], что оператор Φ *вольтерров по А. Н. Тихонову* (или *вольтерров*), если из условия $x|_\tau = y|_\tau,\ \ \tau \in (a,b]$, следует равенство $(\Phi(x))|_\tau = (\Phi(y))|_\tau$, где $z|_\tau$ — сужение $z \in \widetilde{C}^n[a,b]$ на отрезок $[a,\tau]$, $(\Phi(z))|_\tau$ — сужение множества $\Phi(z)$ на отрезок $[a,\tau]$.

Далее предположим, что оператор $\Phi : \widetilde{C}^n[a,b] \to S(L^n[a,b])$ (правая часть включения (1)) вольтерров.

Пусть $\tau \in (a,b]$. Определим непрерывное отображение V_τ из $\widetilde{C}^n[a,\tau]$ в $\widetilde{C}^n[a,b]$ равенством

$$(V_\tau(x))(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если} \quad t \in [a,\tau]; \\ x(\tau), & \text{если} \quad t \in (\tau,b]. \end{cases} \tag{4}$$

О п р е д е л е н и е 3. Будем говорить, что функция $x \in \widetilde{C}^n[a,\tau]$ является *решением задачи* (1)–(3) *на отрезке* $[a,\tau]$, $\tau \in (a,b]$, если существует такое $q \in (\Phi(V_\tau(x)))|_\tau$, что функция $x(\cdot)$ представима в виде

$$x(t) = x_0 + \int_a^t q(s)ds + \sum_{k\,:\,t_k \leqslant \tau} \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta x(t_k), \tag{5}$$

где отображение V_τ определено равенством (4).

Далее, будем говорить, что функция $x : [a, c) \to \mathbb{R}^n$ является *решением задачи* (1)–(3) *на* $[a, c)$, если для любого $\tau \in (a, c)$ сужение $x|_\tau \in \widetilde{C}^n[a, \tau]$ и найдется такая функция $q : [a, c) \to \mathbb{R}^n$, что для любого $\tau \in (a, c)$, $q|_\tau \in (\Phi(V_\tau(x)))|_\tau$ и для любого $t \in [a, c)$ имеет место (5), где $t_k \in [a, c)$.

Решение $x : [a, c) \to \mathbb{R}^n$ задачи (1)–(3) на $[a, c)$ будем называть *непродолжаемым*, если не существует такого решения y задачи (1)–(3) на $[a, \tau]$, $\tau > c$, что для любого $t \in [a, c)$ выполнено равенство $x(t) = y(t)$. Решение задачи (1)–(3) считается непродолжаемым.

Теорема 1. *Найдется такое* $\tau \in (a, b]$, *что решение задачи* (1)–(3) *существует на отрезке* $[a, \tau]$.

Теорема 2. *Для того чтобы решение* $x : [a, c) \to \mathbb{R}^n$ *задачи* (1)–(3) *было продолжаемым на* $[a, \tau]$, $\tau \in (c, b]$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\overline{\lim\limits_{t \to c-0}} |x(t)| < \infty$.

Теорема 3. *Всякое решение* $x : [a, \tau] \to \mathbb{R}^n$ *задачи* (1)–(3), *где* $\tau < b$, *может быть продолжено до непродолжаемого.*

О п р е д е л е н и е 4. Пусть $H(x_0, \tau)$ — множество всех решений задачи (1)–(3) на отрезке $[a, \tau]$, $\tau \in (a, b]$. Будем говорить, что множество всех решений задачи (1)–(3) *априорно ограничено*, если найдется такое число $r > 0$, что для всякого $\tau \in (a, b]$ не существует решения $y \in H(x_0, \tau)$, для которого выполнено неравенство $\|y\|_{\widetilde{C}^n[a,\tau]} > r$.

Теорема 4. *Пусть множество всех решений задачи* (1)–(3) *априорно ограничено. Тогда для любого* $\tau \in (a, b]$ *множество* $H(x_0, \tau) \neq \varnothing$ *и существует такое* $r > 0$, *что для каждого* $\tau \leqslant b$ *и любого* $y \in H(x_0, \tau)$ *выполнено неравенство* $\|y\|_{\widetilde{C}^n[a,\tau]} \leqslant r$.

О п р е д е л е н и е 5. Пусть $\widetilde{C}^1_+[a, b]$ — множество неотрицательных функций пространства $\widetilde{C}^1[a, b]$; аналогичный смысл имеют обозначения $L^1_+[a, b]$ и $\mathbb{R}^1_+$. Будем говорить, что отображения $\Phi : \widetilde{C}^n[a, b] \to S(L^n[a, b])$ и $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, \ldots, m$ *обладают свойством* $\mathcal{A}$, если найдутся изотонный непрерывный вольтерров оператор $\Gamma : \widetilde{C}^1_+[a, b] \to L^1_+[a, b]$ и неубывающие непрерывные функции $\widetilde{I}_k : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$, $k = 1, \ldots, m$, для которых справедливы условия: для любой функции $x \in \widetilde{C}^n[a, b]$ и произвольного измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ выполнено неравенство $\|\Phi(x)\|_{L^n(\mathcal{U})} \leqslant \|\Gamma(Zx)\|_{L^1(\mathcal{U})}$; для любого $k = 1, \ldots, m$ и произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место оценка $|I_k(x)| \leqslant \widetilde{I}_k(|x|)$; множество решений задачи

$$\dot{y} = \Gamma(y), \quad \Delta y(t_k) = \widetilde{I}_k(y(t_k)), \quad k = 1, \ldots, m, \quad y(a) = |x_0|$$

априорно ограничено. Здесь отображение $Z : \widetilde{C}^n[a,b] \to \widetilde{C}^1_+[a,b]$ определено равенством $(Zx)(t) = |x(t)|$.

Теорема 5. *Если отображения Φ и I_k обладают свойством $\mathcal{A}$, то для любого $\tau \leqslant b$ множество $H(x_0,\tau) \neq \varnothing$ и найдется такое $r > 0$, что для любых $\tau \leqslant b$ и $y \in H(x_0,\tau)$ выполнено неравенство $\|y\|_{\widetilde{C}^n[a,\tau]} \leqslant r$.*

* * *

1. Завалищин С. Т., Сесекин А. Н. Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991.
2. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Элементы теории функционально-дифференциальных уравнений. М.: Высш. шк., 1987.
3. Тихонов А. Н. Функциональные уравнения типа Вольтерра и их приложения к некоторым вопросам математической физики // Бюл. Моск. ун-та. Секция А. 1938. Т. 1, № 8. С. 1–25.

Поступила в редакцию 20.01.08

A. I. Bulgakov, A. I. Korobko, O. V. Filippova
To the theory of functional-differential inclusions with impulses

The functional-differential inclusions with Volterra (in the sense of Tikhonov) multivalued maps and impulses are dealt with. There are the theorems formulated on the prolongability of solutions as well as on the connection between a priori boundness of solutions and global solvability of such a system.

Булгаков Александр Иванович
Тамбовский государственный университет
392000, Россия, г. Тамбов,
ул. Интернациональная, 33
E-mail: aib@tsu.tmb.ru

Коробко Анатолий Иванович
Тамбовский государственный университет
392000, Россия, г. Тамбов,
ул. Интернациональная, 33
E-mail: prof13@yandex.ru

Филиппова Ольга Викторовна
Тамбовский государственный университет
392000, Россия, г. Тамбов,
ул. Интернациональная, 33
E-mail: aib@tsu.tmb.ru