ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.929

© *В. Н. Баранов*

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ[1]

Даются необходимые и достаточные условия инвариантности множеств для систем с последействием.

Ключевые слова: системы с последействием, множества выживаемости, инвариантные множества.

Пусть задано число $r>0$. Обозначим $\mathfrak{X}=C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных на отрезке $[-r,0]$ функций со значениями в $\mathbb{R}^n$ и нормой $\|\varphi\|_{\mathfrak{X}} \doteq \max\limits_{s\in[-r,0]}|\varphi(s)|$. Для непрерывной функции $t\to x(t)\in\mathbb{R}^n$, $t\in[t_0-r,t_0+\alpha)$ обозначим $t\to x_t\in\mathfrak{X}$, $t\in[t_0-r,t_0+\alpha)$ — отображение заданное равенством

$$x_t(s)\doteq x(t+s),\quad t\in[t_0-r,t_0+\alpha),\quad s\in[-r,0]. \tag{1}$$

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения с последействием

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t), \tag{2}$$

$$x_{t_0}=\varphi, \tag{3}$$

где $f:\mathbb{R}\times\mathfrak{X}\to\mathbb{R}^n$ — непрерывная на $\mathbb{R}\times\mathfrak{X}$ функция, $\varphi\in\mathfrak{X}$.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $M\subset\mathbb{R}\times\mathfrak{X}$. Будем говорить, что множество M является *множеством выживаемости системы* (2), если для любой точки $(t_0,\varphi)\in M$ найдется решение задачи (2), (3) $t\to x(t)\in\mathbb{R}^n$, $t\in[t_0-r,t_0+\alpha)$ такое, что для всех $t\in[t_0-r,t_0+\alpha)$ выполнено включение $(t,x_t)\in M$, где $t\to x_t\in\mathfrak{X}$ определено равенством (1).

Если для любой точки $(t_0,\varphi)\in M$ и любого решения $t\to x(t)\in\mathbb{R}^n$ задачи (2), (3) движение $t\to x_t$, определеное равенством (1), не покидает множества M, то будем говорить, что множество M *положительно инвариантно.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06–01–00258).

Теорема 1. *Пусть M — непустое замкнутое подмножество $\mathbb{R}\times\mathfrak{X}$, $f:\mathbb{R}\times\mathfrak{X}\to\mathbb{R}^n$ — непрерывная функция. Тогда M является множеством выживаемости системы* (2)*, если и только если имеет место включение $f(t,\varphi)\in T_{(t,\varphi)}M$.*

Здесь под $T_{(t_0,\varphi)}M$ понимается класс эквивалентности $\{t\to y_t\}$, где отображение $t\to y_t$ определено равенством (1) и функцией

$$y(t)=\varphi(t-t_0),\quad t\in[t_0-r,t_0],$$
$$y(t)=\varphi(0)+(t-t_0)f(t_0,\varphi),\quad t\in[t_0,t_0+\alpha).$$

Теорема 2. *Пусть $M\subset\mathbb{R}\times\mathfrak{X}$ — замкнутое подмножество и задана $f:\mathbb{R}\times\mathfrak{X}\to\mathbb{R}^n$ — непрерывная функция. Пусть найдется положительное число $\hat\delta$ такое, что для всех $0\leqslant\delta\leqslant\hat\delta$ и для всех $(t,\varphi)\in\partial M^\delta$ выполнено включение $f(t,\varphi)\in T_{(t,\varphi)}M^\delta$. Тогда множество M является положительно инвариантным для системы* (2).

Аналогичные результаты имеют место и для дифференциальных включений с последействием.

Поступила в редакцию 15. 02. 08

V. N. Baranov
Invariant sets of systems with aftereffect

The necessary and sufficient conditions for the positive invariance of a set for systems (inclusions) with aftereffect are presented.

Баранов Виктор Николаевич
ГОУВПО «Удмуртский
государственный университет»
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 4)
E-mail: vbaranov@uni.udm.ru