ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.978.4

© *А. С. Банников*

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ [1]

Получены достаточные условия разрешимости линейной задачи уклонения в нестационарной дифференциальной игре со многими участниками.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, задача уклонения.

§ 1. Постановка задачи

Рассматривается линейная нестационарная задача конфликтного взаимодействия управляемых объектов с участием n преследователей и m убегающих при одинаковых динамических возможностях всех участников. Цель преследователей — поймать всех убегающих, цель убегающих — избежать поимки хотя бы одного из них. Случай простого преследования рассматривался в [1], линейная стационарная задача конфликтного взаимодействия рассматривалась в [2]. Получены достаточные условия разрешимости глобальной задачи уклонения.

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей и m убегающих.

Закон движения каждого из преследователей P_i, $i = 1, \ldots, n$ имеет вид

$$\dot{x}_i(t) = -a(t)x_i(t) + u_i(t),\ x_i(t_0) = x_i^0,\ u_i \in U.$$

Закон движения каждого из убегающих E_j, $j = 1, \ldots, m$ имеет вид

$$\dot{y}_j(t) = -a(t)y_j(t) + v_j(t),\ y_j(t_0) = y_j^0,\ v_j \in U,$$

причем $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.

Здесь x_i, y_j, u_i, $v_j \in \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^k$ — строго выпуклый компакт, $a(t)$ — действительная измеримая функция, интегрируемая на любом компактном подмножестве оси t. Убегающие используют кусочно-программные стратегии.

Обозначим данную игру через $\Gamma(n, m, z_0)$, где $z_0 = (x^0, y^0)$, $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, $y^0 = (y_1^0, \ldots, y_m^0)$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06–01–00258).

Определим функцию v, полагая $v(\psi) = C'(U;\psi)$, где $C'(U;\psi)$ — градиент опорной функции $C(U;\psi)$.

Пусть $g(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \exp\left(\int\limits_{t_0}^{\tau} a(s)\,ds\right) d\tau$, $\lambda_0 = \inf\limits_{t>t_0} \frac{1}{g(t)} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{g(t)}$, H^+, H^- — открытые положительное и отрицательное полупространства, определяемые гиперплоскостью H.

Определение 1. В дифференциальной игре $\Gamma(n,m,z_0)$ из состояния z_0 разрешима *локальная задача уклонения*, если существуют стратегии $V_1,\ldots,V_m$ убегающих $E_1,\ldots,E_m$ такие, что для любых траекторий $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ найдётся номер $s \in \{1,\ldots,m\}$, что $y_s(t) \neq x_i(t)$ для всех $t \geqslant t_0$ и всех $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Определение 2. В дифференциальной игре $\Gamma(n,m,z_0)$ разрешима *глобальная задача уклонения*, если из любого начального состояния z_0 разрешима локальная задача уклонения.

§ 2. Достаточные условия разрешимости локальной задачи уклонения

Лемма 1. *Пусть в игре $\Gamma(n,m,z_0)$ существуют гиперплоскости H_1, H_2, множества $I \subset \{1,\ldots,n\}$, $J \subset \{1,\ldots,m\}$, $|J| \geqslant |I|+1$ такие, что выполнены следующие условия.*

1. $H_1 \parallel H_2$, $H_2^+ \subset H_1^+$.
2. $x_i^0 \in \overline{H_2{}^+}$, $i \in I$, $x_i^0 \in \overline{H_1{}^-}$, $i \notin I$, $y_j^0 \in H_1{}^+ \cap H_2{}^-$, $j \in J$.
3. *Для любой пары индексов $i,j \in J$, $i \neq j$, начальные позиции убегающих удовлетворяют условию $y_i^0 - y_j^0 \nparallel v(q) - v(-q)$, где q — единичный вектор нормали гиперплоскости H_1, направленный в H_1^+.*

Тогда в игре $\Gamma(n,m,z_0)$ разрешима локальная задача уклонения.

Лемма 2. *Пусть в игре $\Gamma(n,m,z_0)$ $\lambda_0 = 0$, существуют гиперплоскости H_1, H_2,…, H_{2l}, множества I_1, I_2, …, I_l, J_1, J_2, …, J_l, такие, что выполнены следующие условия.*

1. $H_1 \parallel H_2 \parallel \cdots \parallel H_{2l}$, $H_j^+ \subset H_{j-1}^+$, $j = 2,\ldots,2l$.
2. $I_s \subset \{1,2,\ldots,n\}$, $J_q \subset \{1,2,\ldots,m\}$, s, $q = 1,\ldots,l$,
   $I_q \cap I_p = \emptyset$, $p \neq q$, $J_q \cap J_p = \emptyset$, $p \neq q$.
3. $x_i^0 \in \overline{H_1{}^-}$, $i \notin \bigcup\limits_{s=1}^{l} I_s$.
4. $x_i^0 \in \overline{H_{2p}^+} \cap \overline{H_{2p+1}^-}$, $i \in I_p$, $p = 1,\ldots,l-1$, $x_i^0 \in \overline{H_{2l}^+}$, $i \in I_l$.

5. $y_j^0 \in H_{2p-1}^+ \bigcap H_{2p}^-$, $j \in J_p$, $p = 1, \ldots, l$.

6. $|J_1| + [|J_2| - |I_1|]^+ + \cdots + [|J_l| - (|I_1| + |I_2| + \cdots + |I_{l-1}|)]^+ \geqslant$
$\geqslant |I_1| + |I_2| + \cdots + |I_l|$, *где* $a^+ = \max(a, 0)$.

7. *Для любой пары индексов* i, $j \in \bigcup\limits_{r=1}^{l} J_r$, $i \neq j$, *начальные позиции убегающих удовлетворяют условию* $y_i^0 - y_j^0 \nparallel v(q) - v(-q)$, *где* q — *единичный вектор нормали гиперплоскости* H_1, *направленный в полупространство* H_1^+.

Тогда в игре $\Gamma(n, m, z_0)$ *разрешима локальная задача уклонения.*

§ 3. Достаточные условия разрешимости глобальной задачи уклонения

Теорема 1. *Пусть* $\lambda_0 = 0$, U — *строго выпуклый компакт с гладкой границей. Тогда для любых натуральных* p, m *таких, что* $m \geqslant p2^p + 2$, *в игре* $\Gamma(2^p + 1, m, z_0)$ *разрешима глобальная задача уклонения.*

* * *

1. Петров Н. Н., Петров Н. Никандр. О дифференциальной игре «казаки-разбойники» // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 8. С. 1366–1374.

2. Чикрий А. А. Конфликтно-управляемые процессы. Киев: Наук. думка. 1992.

Поступила в редакцию 12.02.08

A. S. Bannikov
Non-stationary problem of group pursuit

The paper deals with the linear non-stationary problem of disputed interaction of operated objects with participation of n pursuers and of m evaders with dynamic opportunities of all participants being equal. Sufficient conditions of resolvability of the global problem of evasion have been obtained.

Банников Александр Сергеевич
ГОУВПО «Удмуртский государственный университет»
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 4)
E-mail: bannikov_a_s@mail.ru