ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.929

© *А. С. Баландин*

О СВЯЗИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ И ФУНКЦИИ КОШИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Выведена формула, связывающая фундаментальное решение и матрицу Коши линейного автономного скалярного уравнения нейтрального типа.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение нейтрального типа, фундаментальное решение, функция Коши.

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение нейтрального типа

$$\left(E-\sum_{i=1}^{I}a_iS^i\right)\dot{x}(t)=\left(\sum_{j=0}^{J}b_jS^j\right)x(t)+f(t),\quad t\in\mathbb{R}_+,\tag{1}$$

где $I\in\mathbb{N}$, $J\in\mathbb{N}_0$, $a_i,b_j\in\mathbb{R}$, $h\in\mathbb{R}_+$, функция $f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ суммируема на каждом конечном отрезке $[0,l]$, S — оператор, определенный равенством

$$(Sy)(t)=\begin{cases}y(t-h), & t-h\geqslant 0,\\ 0, & t-h<0.\end{cases}$$

Ставится задача получения простых формул, связывающих функцию Коши и фундаментальное решение уравнения (1).

Пусть X — фундаментальное решение уравнения (1). Поставим ему в соответствие последовательность $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, элементы которой определяются равенством $x_k(\tau)=X(kh+\tau)$, $\tau\in[0,h]$, и для этой последовательности составим производящую функцию $F_X(\tau,z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}x_k(\tau)z^k$, $z\in\mathbb{C}$.

Обозначим $P_a(z)=\sum\limits_{i=1}^{I}a_iz^i$, $P_b(z)=\sum\limits_{j=1}^{J}b_jz^j$.

Лемма 1. $F_X(\tau,z)=\dfrac{\exp\left(\frac{P_b(z)\,\tau}{1-P_a(z)}\right)}{1-z\exp\left(\frac{P_b(z)\,h}{1-P_a(z)}\right)},\quad\tau\in[0,h].$

Рассмотрим уравнение

$$Y(t)=1+\sum_{i=1}^{I}a_i\left(S^iY\right)(t)+\sum_{j=0}^{J}b_jS^j\left(\int_0^tY(\mu)\,d\mu\right),\quad t\in\mathbb{R}_+.\tag{2}$$

Положим $Y(t) \equiv 0$ при $t \in (-\infty, 0)$.

Лемма 2. *Пусть* C — *функция Коши уравнения* (1), Y — *решение уравнения* (2). *Тогда* $C(t,s) = Y(t-s)$.

Пусть C — функция Коши уравнения (1). Поставим ей в соответствие с помощью леммы 2 последовательность $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, определенную равенством

$$y_k(\tau) = \begin{cases} Y(kh+\tau), & \tau \in [0,h), \\ \lim\limits_{\tau\to h-0} Y(kh+\tau), & \tau = h, \end{cases}$$

и составим производящую функцию $F_C(\tau,z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k(\tau) z^k$, $z \in \mathbb{C}$.

Лемма 3. $$F_C(\tau,z) = \frac{1}{1-P_a(z)} \frac{\exp\left(\frac{P_b(z)\,\tau}{1-P_a(z)}\right)}{1 - z\exp\left(\frac{P_b(z)\,h}{1-P_a(z)}\right)}, \quad \tau \in [0,h].$$

Следующие теоремы устанавливают связь между функцией Коши и фундаментальным решением, а также их производящими функциями.

Теорема 1. *Пусть* r_X, r_C — *радиусы сходимости рядов* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k(\tau) z^k$ *и* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k(\tau) z^k$. *Тогда* $r_C \leqslant r_X$, *а для сумм этих рядов имеет место равенство* $F_C(\tau,z) = \frac{1}{1-P_a(z)} F_X(\tau,z)$.

Теорема 2. *Пусть* X — *фундаментальное решение уравнения* (1), *а* Y — *решение уравнения* (2). *Тогда* $X(t) = \left(E - \sum\limits_{i=1}^{I} a_i S^i\right) Y(t)$.

На основании лемм 1 и 3 можно иследовать асимптотическое поведение функции Коши и фундаментального решения; в частности, нетрудно получить критерии экспоненциальной устойчивости уравнения (1).

Поступила в редакцию 14. 02. 08

A. S. Balandin

On the relationship between the fundamental solution and the Cauchy function of linear differential-difference equations of neutral type

The paper presents simple formulas relating the fundamental solution of a linear differential-difference equation of neutral type to its Cauchy function.

Баландин Антон Сергеевич
Пермский государственный
технический университет
614000, Россия, г. Пермь,
Комсомольский проспект, 29а
E-mail: balandin_anton@dom.raid.ru